1 ثنـــــائـــي القطـــــب RC

Dipole RC

I – المكثف : condensateur

1 – تعريف :

يتكون المكثف من موصلين يسميان لبوسين يفصل بينهما عازل استقطابي :

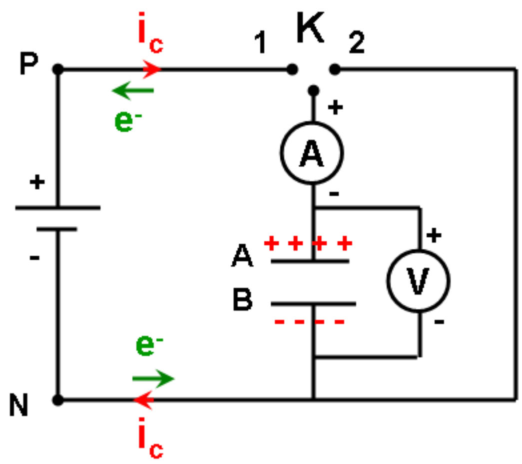
❖ دور المكثف : يمكن من تخزين كمية من الكهرباء و إرجاعها عند الحاجة .

❖ الرمز الاصطلاحي للمكثف :

1 – شحنة المكثف :

أ – شحنة المكثف :

ننجز التركيب الكهربائي التالي :



نضع قاطع التيار في الموضع (1) فنلاحظ :

- يشير الأمبير متر خلال وقت و جيز إلى مرور تيار كهربائي

- يشير الفولطتر بسرعة إلى توتر يساوي القوة الكهربائية محركة للمولد G , و يبقى هذا التوتر ثابتا : نقول أن المكثف مشحون.

❖ تعليل :

- يفسر مرور التيار الكهربائي في الدراة بتراكم الإلكترونات على اللبوس B فتظهر شحنة سالبة و بالتأثير (الكهرساكن) تظهر شحنة موجبة على اللبوس A , حيث يفقد اللبوس A نقس الشحنة التي تكسبها اللبوس B و تتجه هذه الإلكترونات من A إلى القطب الموجب للمولد.

- يفسر ظهور التوتر بين مربطي المكثف بوجود فرق الجهد بين لبوسيه حيث يشحنان بشحنتين متقابلتين حيث $q = q_A = -q_B$

و عندما يصبح المكثف مشحون فإن : $U_{AB} = U_{PN} = E$: E القوة الكهربائية

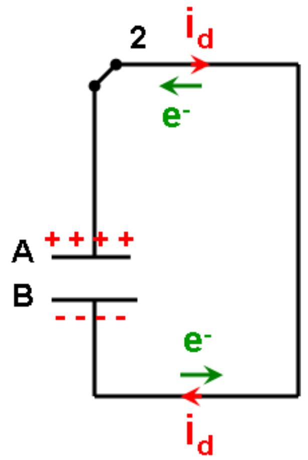
تسمى شحنة المكثف الكمية الكهربائية الكمية q التي يتوفر عليها أحد لبوسيه لتكن q_A شحنة اللبوس A $(q_A > 0)$ q_B شحنة اللبوس B $(q_B > 0)$ في هذه الحالة $q = q_A = q_B$.

نسمي شحنة المكثف الكمية الكهربائية q التي يتوفر عليها أحدد لبوسيه لتكن q_A شحنة اللبوس A $(q_A > 0)$ و q_B شحنة اللبوس B $(q_B < 0)$ في هذه الحالة $q = q_A = -q_B$

ب – تفريغ المكثف :

بعد شحن المكثف نضع قاطع التيار في الموضع (2) فنلاحظ أن :

- يشير الأمبير متر إلى مرور وجيز للتيار الكهربائي في المنحى المعاكس.
- و الفولطمتر يشير إلى انعدام سريع للتوتر.



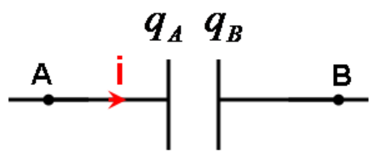
- بعد غلق قاطع التيار فإن الالكترونات المتراكمة على اللبوس **B** تعود إلى اللبوس **A** .

- تيار التفريغ الذي يظهر في الدارة له عكس منحى تيار الشحن.

- وعندما يتيهي التفريغ فإن $i_d = 0$ و $U_{AB} = 0$ و اللبوس A و B يصبحان محايدين كهربائيا.

3 – العلاقة بين الشحنة و شدة التيار الكهربائي :

نختار منحى موجبا و لشدة التيار حيث يدخل من اللبوس **A** :



- شدة التيار الكهربائي هي صبيب الشحن الكهربائية و هي كمية الكهرباء التي تصل إلى لبوس المكثف في وحدة الزمن .

$$\boxed{i(t) = \frac{dq(t)}{dt}}$$

أمبيــر (A) ← $i(t)$ ؛ كولوم (C) ← $dq(t)$ ؛ الثانية (s) ← dt

❖ تجبير :

- عندما يمر التيار في المنحى الموجب تزداد شحنة اللبوس **A** $\frac{dq(t)}{dt} > 0$ أي $i > 0$.

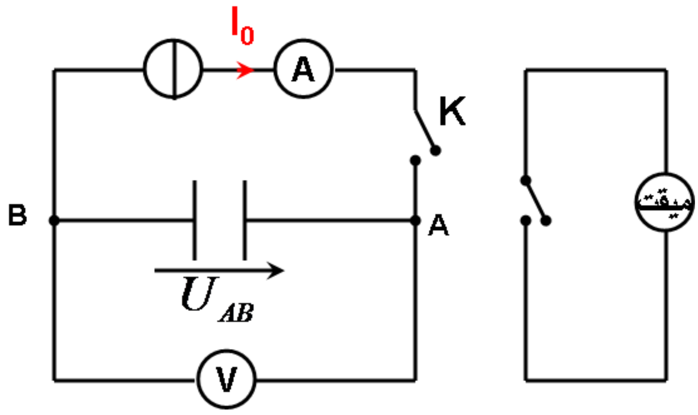
- عندما يمر التيار في المنحى المعاكس للمنحى الموجب تتناقص شحنة اللبوس **A** $\frac{dq(t)}{dt} < 0$ أي $i < 0$.

❖ ملحوظة :

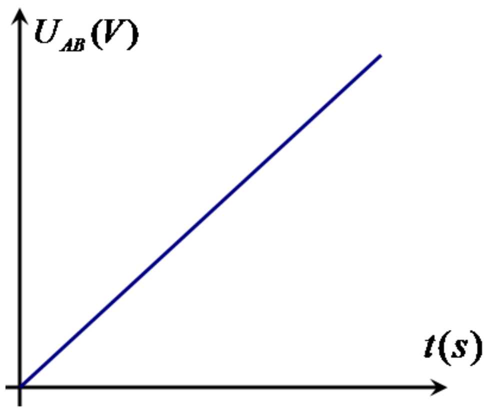
بالنسبة للتيار المستمر $(I = cte)$ $I = \frac{q}{t}$

4 – العلاقة بين الشحنة و التوتر : سعة مكثف

ننجز التركيب الممثل أسفله :



عند غلق قاطع التيار **K** يزود المولد الدارة بتيار شدته I_0 ثابتة وفي نفس الوقت ينطلق الميقت و يبدأ بحساب المدة الزمنية اللازمة لظهور التوتر u_{AB} , نقيس هذا الأخير بالنسبة لكل مدة زمنية t و ندون النتائج التالية و نخط $u_{AB} = f(t)$.



نلاحظ أن المنحنى عبارة عن دالة خطية تمر أصل و بالتالي فإن : $u_{AB} = k.t$

و بما أن شدة التيار الكهربائي I_0 ثابتة فإن : $q = I_0.t$

$$\frac{q}{u_{AB}} = \frac{I_0}{k} = C$$

نلاحظ أن الشحنة **q** تتناسب مع التوتر U_{AB} و يسمى معامل التناسب **C** سعة المكثف و حدته في النظام **(SI)** هي الفارادي **F** :

$$\boxed{q(t) = C.u_{AB}(t)}$$

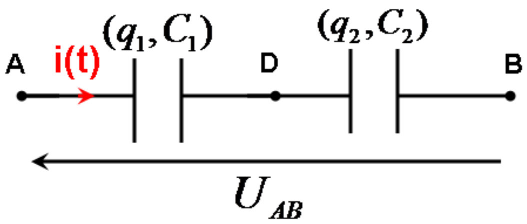
(C) ← ; → (V) ; ↓ (F)

II – تجميع المكثفات :

1 – التجميع على التوالي :

نركب على التوالي مكثفين سعتهما بالتتابع C_1 و C_2 فيمر فيهما نفس شدة التيار الكهربائي و يشحنان بشحنتين متساويتين :

$q = q_1 = q_2$:



حسب قانون إضافية التوترات :

$$U_{AB}=U_{AD}+U_{DB}$$

و لدينا : $U_{AD}=\frac{q_1}{C_1}$ و $U_{DB}=\frac{q_2}{C_2}$

$U_{AB}=\frac{q_1}{C_1}+\frac{q_2}{C_2}$ مع $q_1=q_2=q$

$$U_{AB}=q.\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)$$

ومنه $\frac{1}{C}=\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)$ مع $U_{AB}=\frac{q}{C}$

❖ ***تعميم :***

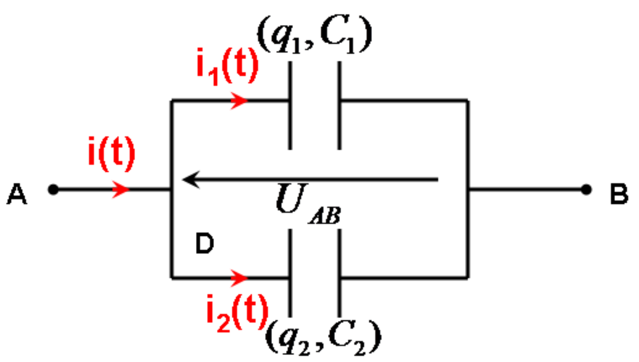
سعة المكثف المكافئ لتجميع عدة مكثفات على التوالي تحقق العلاقة : $\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+........+\frac{1}{C_n}=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{C_i}$

❖ ***فائدة التركيب على التوالي :***

يمكن هذا التركيب من الحصول على سعة قيمتها أصغر , مع تطبيق توتر عال قد لا يتحمله مكثف إذا استعمل لوحده.

2 – التجميع على التوازي :

نركب على التوازي مكثفين سعتهما C_1 و C_2 فيكون نفس التوتر U_{AB} مطبق بين مربطيهما :



حسب قانون العقد فإن :

$$i=i_1+i_2$$

$$\frac{q}{t}=\frac{q_1}{t}+\frac{q_2}{t}$$

$$q=q_1+q_2$$

مع $q_2=C_2.U_{AB}$ و $q_1=C_1.U_{AB}$

$$q=C_1.U_{AB}+C_2.U_{AB}$$

$$q=(C_1+C_2)U_{AB}$$

$C=C_1+C_2$ ومنه مع $q=C.U_{AB}$

❖ تعميم :

سعة المكثف المكافئ لعدة مكثفات على التوازي تحقق العلاقة : $C = C_1 + C_2 + ... + C_n = \sum_{i=1}^{i=n} C_i$

❖ فائدة التركيب على التوازي :

يستعمل هذا التركيب من لتكبير السعة و يُمَكِنُ بتطبيق توتر ضعيف من الحصول على شحنة كهربائية كبيرة قد لا يوفرها كل مكثف على حدة.

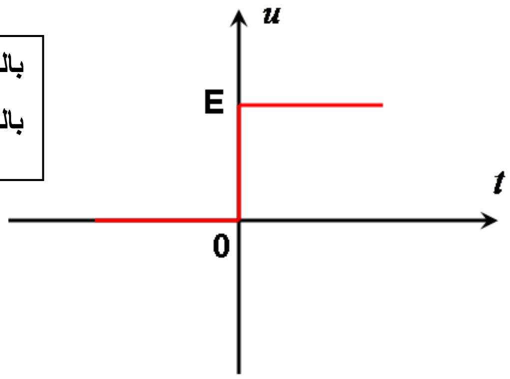
❖ تطبيق :

III – استجابة ثنائي القطب RC لرتبة توتر :

1 – استجابة ثنائي القطب RC لرتبة صاعدة للتوتر :

✓ ثنائي القطب RC : يتكون ثنائي القطب RC من مكثف سعته C و موصل أومي مقاومته R مركبين على التوالي.

❖ رتبة صاعدة للتوتر :

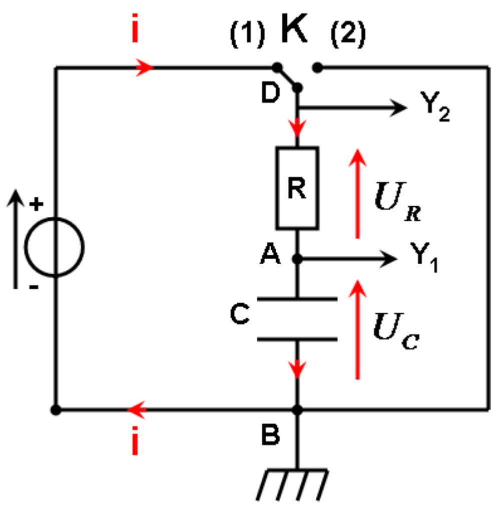


بالنسبة ل $t < 0$ فإن $u = 0$

بالنسبة ل $t \geq 0$ فإن $u = E$

أ – المعادلة التفاضلية :

ننجز التركيب الكهربائي التالي :



- قبل غلق الدارة يكون المكثف غير مشحون .

- نغلق الدارة في لحظة نعتبرها أصلا للتواريخ $t = 0$ ، $u(t=0) = 0$

حسب قانون إضافية التوترات $E = u_R + u_C$

و لدينا حسب قانون أوم : $u_R(t) = R.i(t)$

مع $q(t)=C.u_C(t)$ و $i(t)=\frac{dq(t)}{dt}$ و منه $i(t)=C.\frac{du_C(t)}{dt}$

وبالتالي :
$$u_R=R.C\frac{dq(t)}{dt}$$

$$E=R.C\frac{dq(t)}{dt}+u_C(t)$$

المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر بين مربطي المكثف : $\tau.\frac{du_C}{dt}+u_C=E$ مع $\tau=R.C$

المعادلة التفاضلية التي تحققها الشحنة : $\tau.\frac{dq}{dt}+q=C.E$

ب – حل امعادلة التفاضلية :

يكتب حل المعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى كالتالي : $u_C(t)=A.e^{-\alpha.t}+B$

مع A و B و α ثوابت يتم تحديدها :

اشتقاق حل المعادلة : $\frac{du_C(t)}{dt}=-\alpha.e^{-\alpha.t}$

نعوض في المعادلة :
$$-\tau.\alpha.Ae^{-\alpha.t}+A.e^{-\alpha.t}+B=E$$
$$A.e^{-\alpha.t}(1-\tau.\alpha)=E-B$$

لكي تتحقق هذه المعادلة مهما تكن t يجب أن يكون المعامل $e^{-\alpha.t}$ منعدم و $A\neq 0$

$1-\tau.\alpha=0$ و $E-B=0$

$\alpha=\frac{1}{\tau}$ و $E=B$

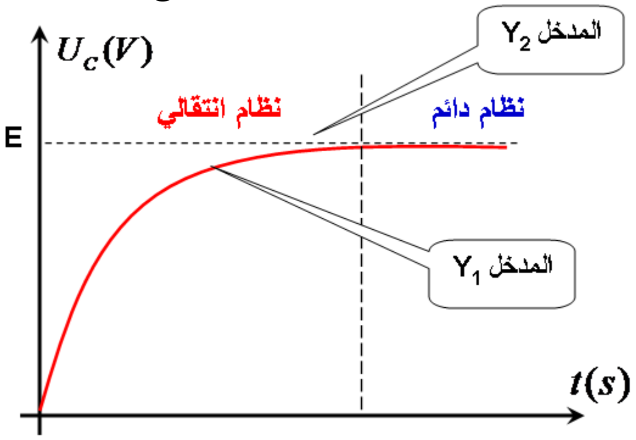
و بالتالي :
$$u_C(t)=A.e^{-\frac{t}{\tau}}+E$$

نحدد A بالاعتماد على الشروط البدئية : $u_C(t=0)=A+E=0$

ومنه فإن : $A=-E$

وبالتالي :
$$u_C(t)=-E.e^{-\frac{t}{\tau}}+E$$

تعبير التوتر $u_C(t)$:
$$u_C(t)=E\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



$$u_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$\begin{cases} u_C(t=0) = 0 \\ u_C(t \to \infty) = E \end{cases}$$

يبرز منحنى تغيرات $u_C(t)$ وجود نظامين :

- نظام انتقالي : تتغير خلال $u_C(t)$ مع الزمن.
- نظام دائم : تأخذ خلاله $u_C(t)$ قيمة ثابتة **E** .

ج – ثابتة الزمن $\tau = R.C$:

تحليل بعد ثابتة الزمن τ :

$$u = R.i \qquad [R] = \frac{[U]}{I}$$

$$i = \frac{q}{t} = \frac{C.U}{t} \qquad [C] = \frac{[I].[t]}{[U]}$$

$$[\tau] = [R].[C] = \frac{[U]}{[I]}.\frac{[I].[t]}{[t]}$$

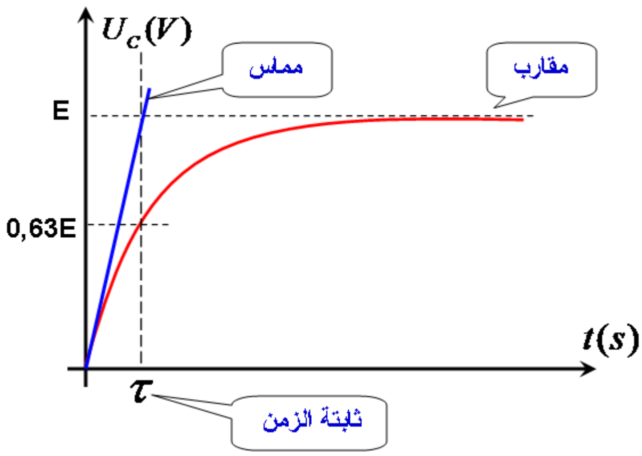
$$[\tau] = [t]$$

إذن المقدار τ له بعد زمني

❖ طريقة تحديد ثابتة الزمن τ :

يمكن تحديد ثابتة الزمن بأحد الطرق التالية :

- بالحساب بالاعتماد على العلاقة التالية $\tau = R.C$
- τ هي أفصول تقاطع مماس المنحنى $u_C = f(t)$ و المقارب $u_C = E$ عند اللحظة $t = 0$.
- τ هي الأفصول الذي يوافق الأرتوب $u_C(t=\tau) = E\left(1 - e^{-1}\right) = 0{,}63E$



د – تعبير شدة التيار المار في الدارة R.C :

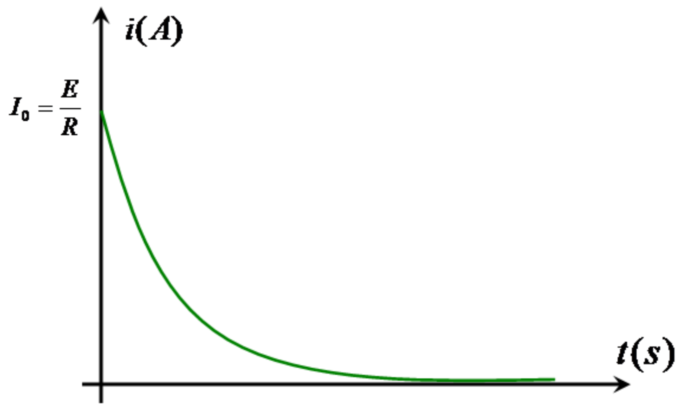
لدينا : $i(t)=\dfrac{dq(t)}{dt}=C\dfrac{du_C(t)}{dt}$

بما أن : $u_C(t)=E\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ و $\tau=R.C$

$$i(t)=C\frac{du_C(t)}{dt}=C.E\left(0-(\frac{1}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}})\right)$$

$$i(t)=\frac{C.E}{R.C}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

مع $I_0=\dfrac{E}{R}$ $\quad i(t)=I_0.e^{-\frac{t}{\tau}} \Leftrightarrow i(t)=\dfrac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$

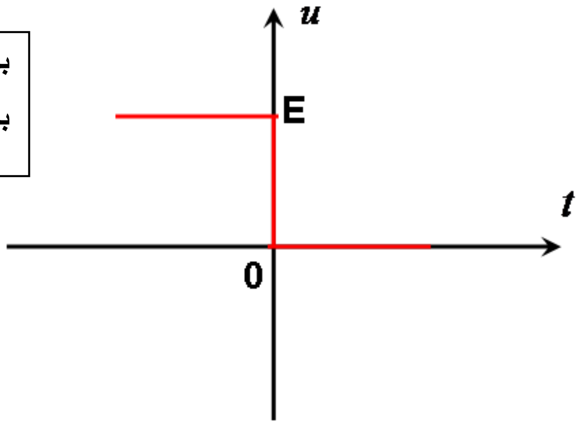


1 – استجابة ثنائي القطب RC لرتبة نازلة للتوتر :

❖ رتبة صاعدة للتوتر :

بالنسبة ل $t<0$ فإن $u=E$

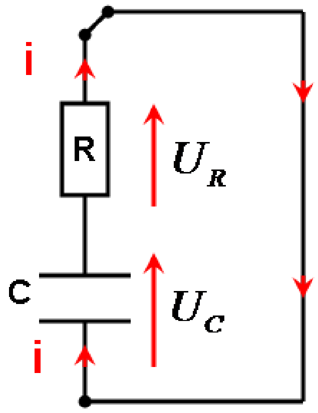
بالنسبة ل $t\geq 0$ فإن $u=0$



أ – المعادلة التفاضلية :

نؤرجح قاطع في الموضع (2) عند لحظة نعتبرها أصلا للتواريخ في هذه الحالة يكون المكثف مشحونا بدئيا $u_C(t=0)=E$:

(2)



حسب قانون إضافية التوترات : $u_C + u_R = u = 0$

و حسب قانون أوم : لدينا $u_R = R.i(t)$ و $i(t) = \frac{dq(t)}{dq} = C\frac{du_C}{dt}$

ومهن : $u_C + R.C\frac{du_C}{qt} = 0$

المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر بين مربطي بين مربطي المكثف : $\tau.\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$ مع $\tau = R.C$

ب – حل امعادلة التفاضلية :

يكتب حل المعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى كالتالي : $u_C(t) = A.e^{-\alpha.t} + B$

مع A و B و α ثوابت يتم تحديدها :

اشتقاق حل المعادلة : $\frac{du_C(t)}{dt} = -\alpha.e^{-\alpha.t}$

نعوض في المعادلة : $-\tau.\alpha.e^{-\alpha.t} + A.e^{-\alpha.t} + B = 0$

$$A.e^{-\alpha.t}(1-\tau.\alpha) = E - B$$

لكي تتحقق هذه المعادلة مهما تكن t يجب أن يكون المعامل $e^{-\alpha.t}$ منعدم و $A \neq 0$

$1-\tau.\alpha = 0$ و $B = 0$

$\alpha = \frac{1}{\tau}$ و $B = 0$

و بالتالي : $u_C(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}}$

نحدد A بالاعتماد على الشروط البدئية : $u_C(t=0) = E = A.e^0 = A$

ومنه فإن : $A = E$

تعبير التوتر $u_C(t)$: $u_C(t) = E.e^{-\frac{t}{\tau}}$ مع $\tau = R.C$

❖ ***طريقة تحديد ثابتة الزمن τ :***

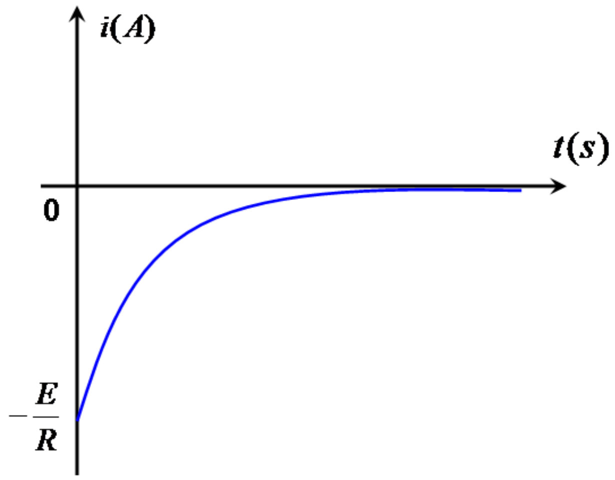
- بالحساب بالاعتماد على العلاقة التالية $\tau = R.C$
- τ هي أفصول تقاطع المماس للمنحنى $u_C = f(t)$ مع مرور الأفاصيل عند اللحظة $t = 0$.
- τ هو الأفصول الذي يوافق الأرتوب $u_C(t) = 0{,}37E$

ج – تعبير شدة تيار التفريغ :

لدينا :
$$u_C(t) = E.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_C}{dt} = -\frac{C.E}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{C.E}{R.C}.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i(t) = -\frac{E}{R}.e^{-\frac{t}{\tau}}$$



❖ ***ملحوظة :***

كلما كانت τ صغيرة كلما كان تفريغ المكثف أسرع و العكس صحيح.

IV – الطاقة المخزونة في المكثف :

لدينا القدرة الكهربائية : $P = u_C.i$

و لدينا : $i = C.\frac{du_C}{dt}$

$$P = C.u_C.\frac{du_C}{dt}$$

$$P = \frac{d}{dt}\left(\frac{C}{2}.u_C^2\right)$$

و نعلم أن القدرة هي مشتقة الطاقة E_e التي يكتسبها بالنسبة للزمن t : $P = \frac{dE_e}{dt}$

ومنه فإن :
$$E_e = \frac{1}{2}C.u_C^2 + cte$$

باعتبار $E_e(u_C = 0) = 0$ ندما يكون المكثف غير مشحون عنده $u_C(t=0) = 0$ فإن : $cte = 0$

عندما تتناسب الطاقة المخزونة في مكثف سعته مع مربع التوتر u_C بين مربطيه :

$$\boxed{\underset{(J)}{E_e} = \frac{1}{2}\underset{(F)}{C}.\underset{(V)}{u_C^2}}$$

$$E_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}q.u_c^2$$