تصحيح الامتحان الوطني الدورة العادية 2016
علوم رياضية

الكيمياء

الجزء الأول : دراسة محلول مائي للامونياك و تفاعله مع حمض

1- دراسة محلول مائي للأمونياك

1-1- تحضير المحلول S_1

1-1-1- معادلة تفاعل الأمونياك مع الماء :

$$NH_{3\,(aq)} + H_2O_{(l)} \rightleftarrows NH_{4\,(aq)}^{+} + HO^{-}_{(aq)}$$

1-1-2- تعبير τ_1 بدلالة C_1 و pH_1 و K_e :

جدول التقدم :

معادلة التفاعل		$NH_{3\,(aq)} + H_2O_{(l)} \rightleftarrows NH_{4\,(aq)}^{+} + HO^{-}_{(aq)}$			
الحالة المجموعة	التقدم	كميات المادة ب (mol)			
الحالة البدئية	0	$C_1.V_1$	بوفرة	0	0
خلال التحول	x	$C_1.V_1 - x$	بوفرة	x	x
الحالة النهائية	x_{eq}	$C_1.V_1 - x_{éq}$	بوفرة	$x_{éq}$	$x_{éq}$

حسب الجدول الوصفي : $[HO^-]_f = \frac{x_{éq}}{V_1}$ أي : $x_{éq} = [HO^-]_f.V_1$

و المتفاعل المحد هو NH_3 نكتب : $C_1.V_1 - x_{max} = 0$ ومنه : $x_{max} = C_1.V_1$

حسب الجداء الأيوني للماء : $K_e = [H_3O^+]_f.[HO^-]_f$

$$[HO^-]_f = \frac{K_e}{[H_3O^+]_f} = \frac{K_e}{10^{-pH_1}} = K_e.10^{-pH_1}$$

حسب تعبير نسبة التقدم النهائي : $\tau_1 = \frac{x_{éq}}{x_{max}} = \frac{K_e.10^{-pH_1}.V_1}{C_1.V_1} = \frac{K_e.10^{-pH_1}}{C_1}$

حساب τ_1: $\tau_1 = \frac{10^{-14}\times 10^{10,6}}{10^{-2}} \approx 4.10^{-2} = 4\%$

1-1-3- تعبير ثابتة التوازن K بدلالة C_1 و τ_1 :

حسب تعبير نسبة التقدم النهائي : $\tau_1 = \frac{x_{éq}}{x_{max}} = \frac{x_{éq}}{C_1.V_1}$ ومنه : $x_{éq} = \tau_1.C_1.V_1$

حسب الجدول الوصفي لدينا : $[HO^-]_f = [NH_4^+]_f = \frac{x_{éq}}{V_1} = \frac{\tau_1.C_1.V_1}{V_1} = \tau_1.C_1$

و $[NH_3]_f = \frac{C_1.V_1 - x_{éq}}{V_1} = \frac{C_1.V_1}{V_1} - \frac{x_{éq}}{V_1} = C_1 - \tau_1.C_1 = C_1(1-\tau_1)$

تعبير ثابتة التوازن :

$$K = \frac{[NH_4^+]_f.[HO^-]_f}{[NH_3]_f} = \frac{(\tau_1.C_1)^2}{C_1(1-\tau_1)} = \frac{\tau_1^2.C_1}{1-\tau_1}$$

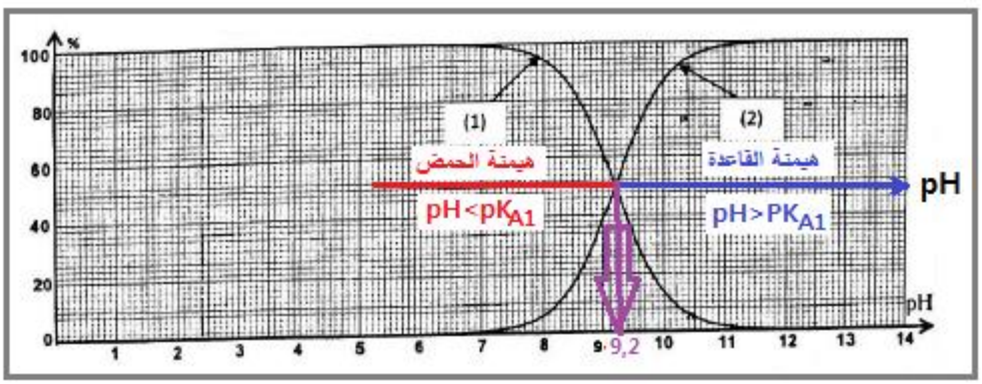
حساب K :

$$K = \frac{(4.10^{-2})^2.10^{-2}}{1-4.10^{-2}} \approx 1,67.10^{-5}$$

1-2- دراسة المحلول المخفف S_2

1-2-1- منحنى النوع القاعدي المهيمن :

عند قيمة $pH = 10,4 > pK_A = 9,2$ للنوع القاعدي NH_3 هو المهيمن (أنظر الشكل أسفله) وبالتالي المنحنى 2 يمثل مخطط توزيع النوع القاعدي .



1-2-2- التحديد المبياني ل :

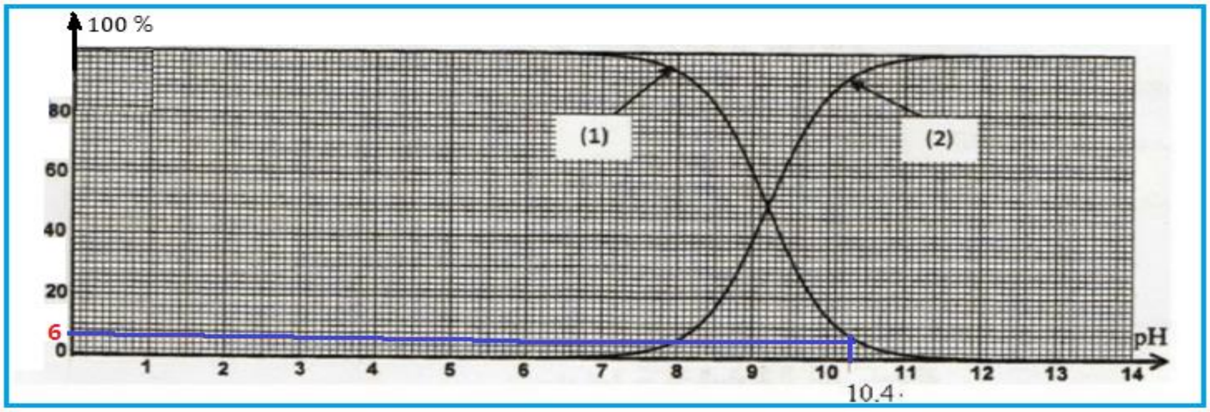
أ- قيمة الثابتة p_{A1} :

حسب المبيان عندما يكون $[NH_3] = [NH_4^+]$ نحصل على $pH = pK_{A1}$ مبيانيا نجد : $pK_{A1} = 9,2$

ب- نسبة التقدم النهائي τ_2 :

$$\tau_2 = \frac{x_{éq}}{x_{max}} = \frac{[NH_4^+]_f}{C_2} = \frac{[NH_4^+]_f}{[NH_4^+]_f + [NH_3]_f}$$

عند $pH_2 = 10,4$ مبيانيا نسبة الحمض هي : $\tau_2 = 0,06 = 6\%$



3-2-1- مقارنة τ_1 و τ_2:

نلاحظ ان $\tau_1 > \tau_2$نستنتج ان نسبة التقدم النهائي تتعلق بالحالة البدئية و هي تتزايد مع التخفيف.

2- دراسة تفاعل الأمونياك مع أيون مثيل أمونيوم

2-1- معادلة تفاعل الأمونياك مع الأيون مثيل أمونيوم :

$$NH_{3\,(aq)} + CH_3NH^+_{3\,(aq)} \rightleftarrows NH^+_{4\,(aq)} + CH_3NH_{2\,(aq)}$$

2-2- ثابتة التوازن K' :

$$K' = \frac{[NH^+_4]_{éq}.[CH_3NH_2]_{éq}}{[NH_3]_{éq}.[CH_3NH^+_3]_{éq}} = \frac{[CH_3NH_2]_{éq}.[H_3O^+]_{éq}}{[CH_3NH^+_3]_{éq}} . \frac{[NH^+_4]_{éq}}{[NH_3]_{éq}.[H_3O^+]_{éq}} = \frac{K_{A2}}{K_{A1}}$$

$$K' = \frac{10^{-pK_{A2}}}{10^{-pK_{A1}}} = 10^{-pK_{A1}+pK_{A2}}$$

$$K' = 10^{9,2-10,7} \approx 3,16.10^{-2}$$

2-3- إثبات تعبير تركيز كل من CH_3NH_2 و NH^+_4 :

الجدول الوصفي :

معادلة التفاعل		$NH_{3\,(aq)}$ +	$CH_3NH^+_{3\,(aq)}$ ⇄	$NH^+_{4\,(aq)}$ +	$CH_3NH_{2\,(aq)}$
الحالة المجموعة	التقدم	كميات المادة ب (mol)			
الحالة البدئية	0	$C.V$	$C.V$	0	0
خلال التحول	x	$C.V - x$	$C.V - x$	x	x
الحالة النهائية	$x_{éq}$	$C.V - x_{éq}$	$C.V - x_{éq}$	$x_{éq}$	$x_{éq}$

حسب الجدول الوصفي :

$$[NH^+_4]_{éq} = [CH_3NH_2]_{éq} = \frac{x_{éq}}{2V}$$

$$[NH_3]_{éq} = [CH_3NH^+_3]_{éq} = \frac{C.V - x_{éq}}{2V} = \frac{n - x_{éq}}{2V}$$

$$K' = \frac{[NH^+_4]_{éq}.[CH_3NH_2]_{éq}}{[NH_3]_{éq}.[CH_3NH^+_3]_{éq}} = \frac{[NH^+_4]_{éq}{}^2}{[NH_3]_{éq}{}^2} = \frac{\left(\frac{x_{éq}}{2V}\right)^2}{\left(\frac{n-x_{éq}}{2V}\right)^2} = \left(\frac{x_{éq}}{n - x_{éq}}\right)^2$$

$$\frac{x_{éq}}{n - x_{éq}} = \sqrt{K'} \implies x_{éq} = \sqrt{K'}\ .(n - x_{éq}) = n.\sqrt{K'} - x_{éq}.\sqrt{K'}$$

$$x_{éq}(1 + \sqrt{K'}) = n.\sqrt{K'} \implies x_{éq} = \frac{n.\sqrt{K'}}{1 + \sqrt{K'}} = \frac{C.V.\sqrt{K'}}{1 + \sqrt{K'}}$$

$$[NH^+_4]_{éq} = [CH_3NH_2]_{éq} = \frac{x_{éq}}{2V} = \frac{C.V.\sqrt{K'}}{2V(1 + \sqrt{K'})}$$

نستنتج :

$$[NH^+_4]_{éq} = [CH_3NH_2]_{éq} = \frac{C}{2}.\frac{\sqrt{K'}}{1 + \sqrt{K'}}$$

4-2- تحديد pH الخليط عند التوازن :

لدينا :

$$pH = pK_{A1} + log\frac{[NH_3]_{éq}}{[NH^+_4]_{éq}}$$

$$[NH^+_4]_{éq} = \frac{C}{2}.\frac{\sqrt{K'}}{1 + \sqrt{K'}}$$

$$[NH_3]_{éq} = \frac{C.V - x_{éq}}{2V} = \frac{C}{2} - \frac{x_{éq}}{2V} = \frac{C}{2} - \frac{C.V.\sqrt{K'}}{2V(1 + \sqrt{K'})} = \frac{C}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{K'}}{1 + \sqrt{K'}}\right)$$

$$[NH_3]_{éq} = \frac{C}{2}\left(\frac{1 - \sqrt{K'} + \sqrt{K'}}{1 + \sqrt{K'}}\right) = \frac{C}{2}\left(\frac{1}{1 + \sqrt{K'}}\right)$$

$$\frac{[NH_3]_{éq}}{[NH^+_4]_{éq}} = \frac{\frac{C}{2}\left(\frac{1}{1+\sqrt{K'}}\right)}{\frac{C}{2}\left(\frac{\sqrt{K'}}{1+\sqrt{K'}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{K'}}$$

$$pH = pK_{A1} + log\frac{1}{\sqrt{K'}} = pK_{A1} - log\sqrt{K'}$$

$$pH = 9,2 - \frac{1}{2}\log(3,16.110^{-2}) \approx 9,95$$

الجزء الثاني : التحليل الكهربائي لمحلول مائي لنترات لنترات الفضة

1- معادلة التفاعل الحاصل في الأنود (أكسدة انودية) :

$$6H_2O_{(l)} \rightleftarrows O_{2\,(g)} + 4H_3O^+_{(aq)} + 4e^-$$

2- إثبات تعبير التقدم x بالاستعانة بالجدول الوصفي :

معادلة التفاعل		$6H_2O_{(l)}4Ag^+_{(s)}$		$\rightleftarrows$	$O_{2\,(g)}$	$4 + H_3O^+_{(aq)} +$	$4Ag_{(s)}$	كمية مادة الإلكترونات المنتقلة
حالة المجموعة	التقدم	كميات المادة بالمول						
الحالة البدئية	0	بوفرة	$n_i(Ag^+)$		0	n_0	0	$n(e^-) = 0$
خلال التحول	x	بوفرة	$n_i(Ag^+) - 4x$		x	$n_0 + 4x$	$4x$	$n(e^-) = 4x$
الحالة النهائية	x_f	بوفرة	$n_i(Ag^+) - 4x_f$		x_f	$n_0 + 4x_f$	$4x_f$	$n(e^-) = 4x_f$

حسب الجدول الوصفي :

$$[H_3O^+]_t = \frac{n_0 + 4x}{V} = [H_3O^+]_0 + \frac{4x}{V}$$

$$\frac{4x}{V} = [H_3O^+]_t - [H_3O^+]_0 \Longrightarrow x = \frac{V}{4}(10^{-pH} - 10^{-pH_0})$$

3- تحديد اللحظة t_1 التي يأخذ فيها الخليط القيمة $pH_1 = 1,5$:

لدينا حسب الجدول الوصفي :

$$\begin{cases} n(e^-) = 4x \\ n(e^-) = \frac{I.t_1}{F} \end{cases} \Longrightarrow 4x = \frac{I.t_1}{F} \Longrightarrow x = \frac{I.t_1}{4F}$$

$$\begin{cases} x = \frac{V}{4}(10^{-pH} - 10^{-pH_0}) \\ x = \frac{I.t_1}{4F} \end{cases} \Longrightarrow \frac{I.t_1}{4F} = \frac{V}{4}(10^{-pH} - 10^{-pH_0}) \Longrightarrow t_1 = \frac{F.V}{I}(10^{-pH} - 10^{-pH_0})$$

$$t_1 = \frac{96500 \times 0,4}{0,266}(10^{-1,5} - 10^{-3}) \Rightarrow t_1 = 4443,75\ s \approx 14h\ 14\ min$$

الفيزياء

التحولات النووية : النشاط الإشعاعي للبولونيوم

1- معادلة التحول النووي :

$$^{210}_{84}Po \longrightarrow {}^{206}_{Z}Pb + {}^{4}_{2}He$$

حسب قانون انحفاظ الشحنة : $84 = Z + 2$ أي: $Z = 84 - 2 = 82$

النواة المتولدة هي : $^{206}_{82}Pb$

2- الطاقة الناتجة $|\Delta E|$ عن تفتت نواة واحدة من $^{210}_{84}Po$:

$$|\Delta E| = \left|E_\ell(^{210}_{84}Po) - E_\ell(^{206}_{82}Pb) - E_\ell(^{4}_{2}He)\right|$$

$$|\Delta E| = \left|1,6449.10^3 - 1,6220.10^3 - 28,2989\right| = |-5,3989| = 5,3989\ MeV$$

$$|\Delta E| \approx 5,4\ MeV$$

-3

3-1- اختيار الأقتراح الصحيح :

عدد النوى المتبقية عند اللحظة t تكتب : $N = N_0.e^{-t.ln2/t_{1/2}}$

عند اللحظة $t = 4t_{1/2}$ نحصل على :

$$N = N_0.e^{-4t_{1/2}.ln2/t_{1/2}} = N_0.e^{-4ln2} = N_0.e^{ln2^{-4}} = N_0.2^{-4} = \frac{N_0}{2^4} = \frac{N_0}{16}$$

عدد النوى المتفتتة هو : $N_D = N_0 - N = N_0 - \frac{N_0}{16} = \frac{15}{16}.N_0$

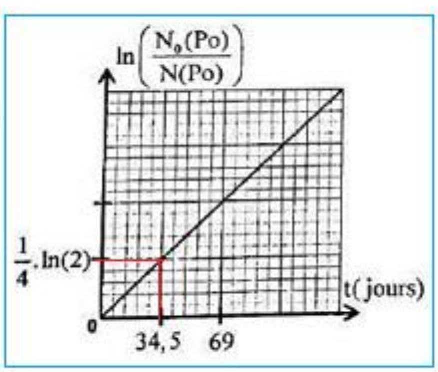
الجواب الصحيح هو د

3-2- تحديد عمر النصف $t_{1/2}$ مبيانيا :

قانون التناقص الإشعاعي يكتب :

$$N(Po) = N_0(Po).e^{-\lambda.t} \Longrightarrow \frac{N(Po)}{N_0(Po)} = e^{-\lambda.t} \Longrightarrow$$

$$\frac{N_0(Po)}{N(Po)} = e^{\lambda.t} \quad (1)$$



$$\ln\left(\frac{N_0(Po)}{N(Po)}\right) = \lambda.t \;\; \Rightarrow \ln\left(\frac{N_0(Po)}{N(Po)}\right) = \lambda.t$$

$$\lambda = \frac{\Delta \ln\left(\frac{N_0(Po)}{N(Po)}\right)}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{4}.ln2}{34,5}$$

$$\frac{ln2}{t_{1/2}} = \frac{\frac{1}{4}.ln2}{34,5}$$

$$t_{1/2} = 4\times 34,5 = 138\ jours$$

3-3- تحديد t_1 :

العلاقة (1) تكتب:

$$\frac{N_0(Po)}{N(Po)} = e^{\lambda.t_1} \;\; \Rightarrow \lambda.t_1 = ln\left(\frac{N_0(Po)}{N(Po)}\right) \;\; \Rightarrow t_1 = \frac{1}{\lambda}.ln\left(\frac{N_0(Po)}{N(Po)}\right)$$

$$t_1 = \frac{t_{1/2}}{ln2}.ln\left(\frac{N_0(Po)}{N(Po)}\right)$$

$$N(Po) + N(Pb) = N_0(Po)$$

$$\frac{N_0(Po)}{N(Po)} = \frac{N(Po) + N(Pb)}{N(Po)} = 1 + \frac{N(Pb)}{N(Po)} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$$

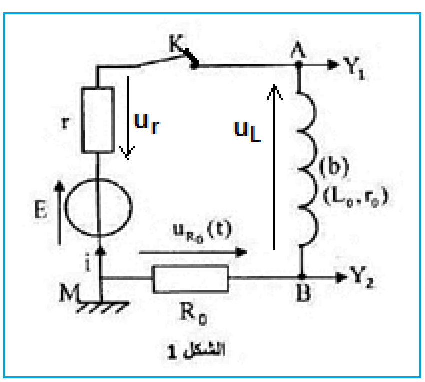
العلاقة (2) تكتب :

$$t_1 = \frac{138}{ln2}\times ln\left(\frac{7}{5}\right) = 67\ jours$$

الكهرباء :

1- استجابة ثنائي القطب RL لرتبة توتر

1-1- إثبات المعادلة التفاضلية التي تحققها شدة التيار $i(t)$



حسب قانون إضافية التوترات :

$$u_{R_0} + u_L + u_r = E$$

$$R_0.i + r_0.i + L_0.\frac{di}{dt} + r.i = E \;\; \Rightarrow L_0.\frac{di}{dt} + (R_0 + r_0 + r).i = E$$

المعادلة التفاضلية تكتب :

$$\frac{L_0}{R_0 + r_0 + r}.\frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R_0 + r_0 + r}$$

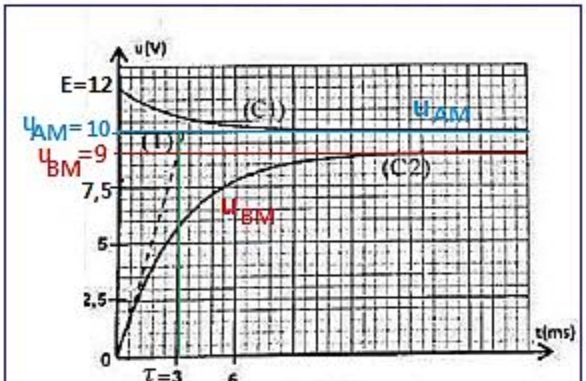
$$\tau.\frac{di}{dt}+i=I \begin{cases} I=\dfrac{E}{R_0+r_0+r} & : \text{شدة التيار في النظام الدائم} \\ \tau=\dfrac{L_0}{R_0+r_0+r} & : \text{ثابتة الزمن} \end{cases}$$

1-2- قيمة E :

حسب المنحنى (C_1) الذي يمثل التوتر u_{AM} عند اللحظة $t=0$ يكون $i=0$

ومنه مبيانيا نجد:

$$u_{AM}=E=12\ V$$



الشكل 2

1-3- قيمة r :

التوتر $u_{AM}=E-ri$ في النظام الدائم يكتب :

$u_{AM\infty}=E-r.I$ أي: $r=\frac{E-u_{AM\infty}}{I}$

التوتر $u_{BM}=R_0.i$ في النظام الدائم يكتب :

$u_{BM\infty}=R_0.I$ أي: $I=\frac{u_{BM\infty}}{R_0}$

من العلاقتين نستنتج :

$$r=\frac{E-u_{AM\infty}}{R_0}.u_{BM}$$

$$r=\frac{12-10}{9}\times 45=10\ \Omega$$

إثبات ان $r_0=5\ \Omega$

في النظام الدائم المعادلة التفاضلية تكتب :

$$I=\frac{E}{R_0+r_0+r}\Rightarrow R_0+r_0+r=\frac{E}{I}\Rightarrow r_0=\frac{E}{u_{BM}}.R_0-R_0-r$$

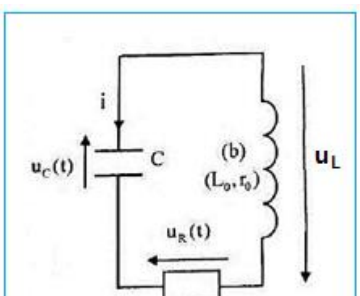
$$r_0=\frac{12}{9}\times 45-45-10=5\ \Omega$$

1-4- التحقق من قيمة L_0 :

ثابتة الزمن τ نعبر عنها : $\tau=\frac{L_0}{R_0+r_0+r}$ أي: $L_0=\tau.(R_0+r_0+r)$

مبيانيا نجد : $\tau=3\ ms$

$$L_0=3.10^{-3}\times(45+5+10)=0,18\ H$$



الشكل 3

2- تفريغ مكثف في ثنائي القطب RL

2-1- النظام الذي يوافق منحنيي الشكل 4 :

النظام شبه دوري

2-2- إثبات المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر $u_C(t)$:

حسب قانون إضافية التوترات :

$$u_L + u_R + u_C = 0$$

$$L_0.\frac{di}{dt} + r_0.i + R.i + u_C = 0$$

$$L_0.\frac{di}{dt} + (R + r_0.).i + u_C = 0$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(C.u_C)}{dt} = C.\frac{du_C}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\left(C.\frac{du_C}{dt}\right) = C.\frac{d}{dt}\frac{du_C}{dt} = C.\frac{d^2u_C}{dt^2}$$

$$L_0.C.\frac{d^2u_C}{dt^2} + (R + r_0).C.\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

المعادلة التفاضلية تكتب :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R + r_0}{L_0}.\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{L_0.C}u_C = 0$$

2-3- الطاقة $|E_J|$ المبددة بمفعول جول بين اللحظتين $t_1 = 0$ و $t_2 = 14\,ms$:

الطاقة الكلية تكتب: $E_T = E_e + E_m = \frac{1}{2}C.u_C^2 + \frac{1}{2}L_0.i^2$

عند اللحظة $t_1 = 0$ حسب الشكل 4

$$\begin{cases} u_C(0) = 12 \\ i(0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow E_{T1} = E_{e1} = \frac{1}{2}C.u_C^2(0) = \frac{1}{2}\times 14,1\times 10^{-6}\times 12^2 = 1,015.10^{-3}\,J$$

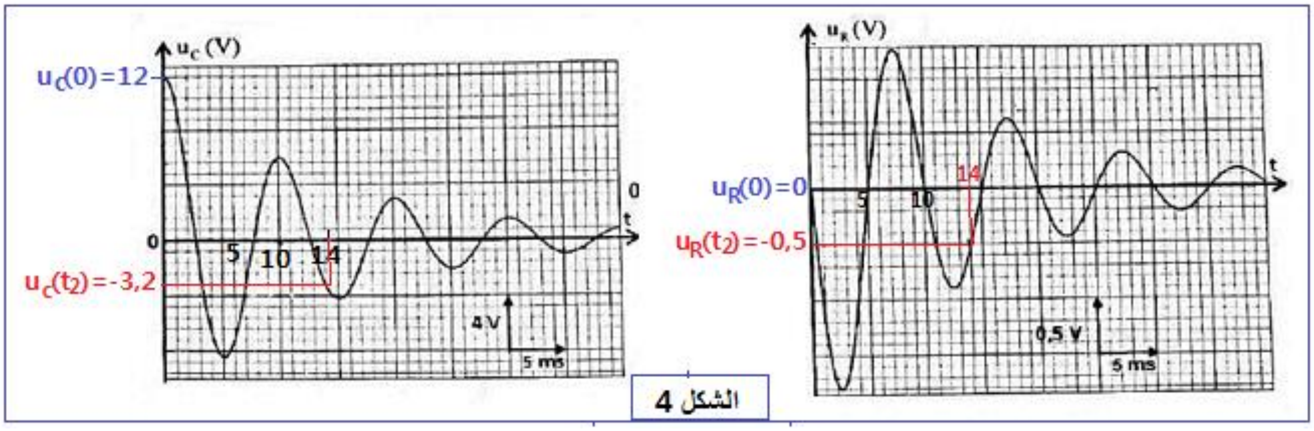
عند اللحظة $t_2 = 14\,ms$ حسب الشكل 4

$$\begin{cases} u_C(t_2) = 3,2\,V \\ u_R(t_2) = -0,5\,V \end{cases} \Longrightarrow E_{T2} = E_{e2} + E_{m2} = \frac{1}{2}C.u_C^2(t_2) + \frac{1}{2}L_0.i^2(t_2) = \frac{1}{2}C.u_C^2(t_2) + \frac{1}{2}L_0.\left(\frac{u_R(t_2)}{R}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\times 14,1\times 10^{-6}\times(-3,2)^2 + \frac{1}{2}\times 0,18\times\left(\frac{-0,4}{20}\right)^2 = 1,284.10^{-4}\,J$$

$$|E_J| = |E_{T1} - E_{T2}| = \left|1,015.10^{-3} - 1,284.10^{-4}\right| = 8,868.10^{-4}\,J$$

$$|E_J| \approx 9.10^{-4}\,J$$



الشكل 4

3- التذبذبات القسرية في دارة RLC على التوالي

3-1- تردد تردد التذبذبات الكهربائية عند الرنين :

حسب تعبير معامل الجودة :

$$Q = \frac{N_0}{\Delta N} \Longrightarrow N_0 = Q.\Delta N$$

$$N_0 = 7 \times 14,3 \approx 100\ Hz$$

3-2- تحديد قيمة R_1 :

عند الرنين ، ممانعة الدارة تساوي: $Z_0 = R_1 + r_0$

حسب تعبير التوتر $u_{AB}(t) = 3\sqrt{2}\cos(2\pi.N.t)$ فإن التوتر الفعال هو $U = 3V$

$$Z_0 = \frac{U}{I_0} \Longrightarrow R_1 + r_0 = \frac{U}{I_0} \Longrightarrow R_1 = \frac{U}{I_0} - r_0$$

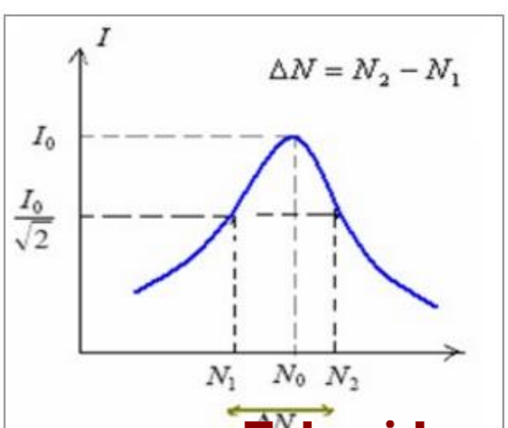
$$R_1 = \frac{3}{1,85.10^2 \times 10^{-3}} - 5 = 11,2\ \Omega$$

-تحديد قيمة C_1: عند الرنين تعبير التردد الخاص يكتب :

$$N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_0.C_1}} \Longrightarrow {N_0}^2 = \frac{1}{4\pi^2.L_0.C_1} \Longrightarrow C_1 = \frac{1}{4\pi^2.L_0.{N_0}^2}$$

$$C_1 = \frac{1}{4\pi^2 \times 0,18 \times 100^2} = 1,4\,.10^{-5}\ F$$

$$C_1 = 14\ \mu F$$



3-3- القدرة الكهربائية المتوسطة المستهلكة بمفعول جول،عندما يأخذ التردد إحدى قيمتي المنطقة المررة :

قيمة شدة التيار (انظر الشكل جانبه) : $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$

$$P = R_T.I^2$$

$$P = (R_1 + r_0).\left(\frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}(R_1 + r_0).{I_0}^2$$

$$P = \frac{1}{2}\times(11,2 + 5)\times 0,185^2 \approx 0,28\ W$$

الميكانيك

الجزء الأول : دراسة حركة سقوط كرتين في الهواء

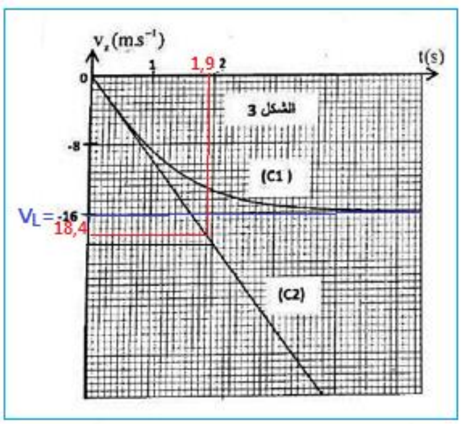
1- إثبات المعادلة التفاضلية التي تحققها السرعة v_z لمركز قصور الكرة :

المجموعة المدروسة : $\{$الكرة$\}$

-جرد القوى بعد إهمال دافعة أرخميدس تخضع الكرة لقوتين :

$\vec{P}$: وزن الكرة

$\vec{f}$: قوة الاحتكاك المائع



تطبيق القانون الثاني لنيوتن : $\sum \vec{F}_{ext} = m_1.\vec{a}_G$ أي : $\vec{P} + \vec{f} = m.\vec{a}_G$

الاسقاط على المحور Oz :

$$-m_1.g + f = m_1.a_z \quad \Rightarrow -g + \frac{f}{m_1} = \frac{d\,v_z}{dt}$$

$$m_1 = \rho_1.V = \frac{4}{3}\pi R^3.\rho_1 \quad ، \quad f = 0,22.\rho_{air}.\pi.R^2.v^2_z$$

$$\frac{f}{m_1} = \frac{0,22.\rho_{air}.\pi.R^2}{\frac{4}{3}\pi R^3.\rho_1}.v^2_z = 0,165.\frac{\rho_{air}}{R.\rho_1}.v^2_z$$

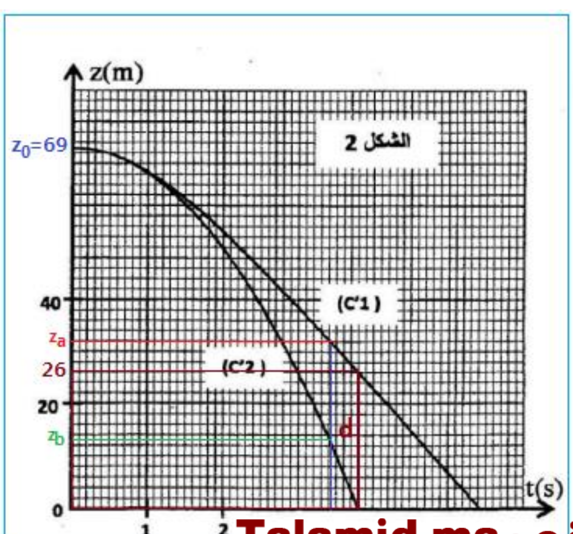
$$\frac{d\,v_z}{dt} = -g + 0,165.\frac{\rho_{air}}{R.\rho_1}.v^2_z$$

2- تعبير السرعة الحدية لحركة الكرة (b) :

عندما تأخذ الكرة السرعة الحدية v_L يكون $\frac{dv_z}{dt} = 0$ المعادلة التفاضلية تكتب :

$$-g + 0,165.\frac{\rho_{air}}{R.\rho_1}.v^2_L = 0 \quad \Rightarrow v^2_L = \frac{g.R.\rho_1}{0,165\rho_{air}}$$

$$v_L = \sqrt{\frac{g.R.\rho_1}{0,165\rho_{air}}}$$



-3

1-3- بالنسبة للكرة (b) نحدد السرعة الحدية :

$$\text{v}_L = \sqrt{\frac{g.R.\rho_2}{0,165\rho_{air}}} = \sqrt{\frac{9,8\times 6.10^{-2}\times 94}{0,165\times 1,3}} = 16\ m/s$$

بما ان منحى حركة الكرة معاكس لمنحى المحور Oz ، فإن :

$$\text{v}_{LZ} = -16\ m/s$$

حسب الشكل 3 السرعة الحدية $\text{v}_{LZ} = -16\ m/s$ للمنحنى (C_1) يوافق تغيرات سرعة الكرة (b) .

2-3- تفسير موافقة المنحنى (C_2) تغيرات أنسوب الكرة (a) :

بمقارنة الكتلة الحجمية للكرتين نلاحظ ان : $\rho_1 > \rho_2$

أثناء السقوط أنسوب الكرة الاثقل هو الاكبر : $z(a) > z(b)$

و هو ما يوافق الشكل 3 جانبه.

إذن المنحنى (C_2) يوافق تغيرات أنسوب الكرة (a).

4- طبيعة حركة الكرة (a) :

حسب مبيان الشكل 3 يتبين أن منحنى (C_2) عبارة عن دالة خطية معادلتها تكتب : $\text{v}_z = kt$

إذن حرة الكرة (a) مستقيمية متغيرة (متسارعة) بانتظام.

المعامل الموجه نكتب k :

$$k = \frac{\Delta \text{v}_z}{\Delta t} = \frac{18,4-0}{1,9-0} = 9,68\ \ m/s^{-2}$$

معادلة السرعة تكتب : $\text{v}_z = 9,68.t$ التكامل يعطي :

$$z = \frac{1}{2}\times 9,68t^2 + z_0$$

لدينا : $z_0 = h = 69m$

المعادلة الزمنية تكتب :

$$z(t) = 4,84t^2 + 69$$

5- تحديد فرق الارتفاع d بين مركزي الكرتين لحظة وصول الكرة الأولى إلى سطح الارض :

حسب مبيان الشكل 2 تصل الكرة (a) إلى سطح الارض عند اللحظة $t = 3,8\ s$ عند هذه اللحظة يكون أنسوب الكرة (b) هو $26m$ وبالتالي المسافة $d = 26\ m$

6- قيمة التسارع a_n :

حسب معادلة التفاضلية للسرعة للكرة (b) :

$$\frac{d\,\text{v}_z}{dt} = -g + 0,165.\frac{\rho_{air}}{R.\rho_1}.\text{v}^2_z$$

$$a_z = -9,8 + 0,165\times\frac{1,3}{6.10^{-2}\times 94}.\text{v}^2_z = -9,8 + 3,8.10^{-2}\,.\text{v}^2_z$$

باستعمال طريقة اولير :

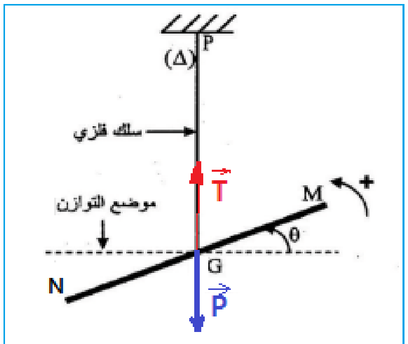
$$a_n = -9,8 + 3,8.10^{-2}.V^2_n \Rightarrow a_n = -9,8 + 3,8.10^{-2}\times(-11,47)^2 \approx -4,8\, m.s^{-2}$$

حساب السرعة V_{n+1} :

$$V_{n+1} = a_n.\Delta t + V_n \Rightarrow V_{n+1} = -4,8\times 0,125 - 11,47 \approx -12,07\ m.s^{-1}$$

الجزء الثاني : دراسة حركة نواس اللي

1- إثبات المعادلة التفاضلية لحركة النواس :



الشكل 4

المجموعة المدروسة { القضيب }

جرد القوى التي يخضع لها القضيب :

الوزن : $\vec{P}$

تاثير السلك : $\vec{T}$

تأثير مزدوجة اللي ذات العزم $M_T = -C.\theta$

تطبيق العلاقة الأساسية لديناميك الدوران :

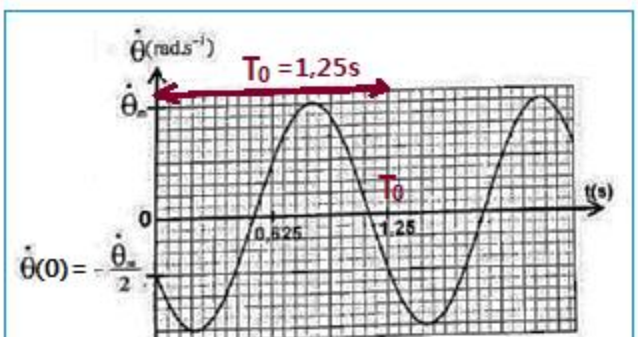
$$M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{T}) + M_T = J_\Delta.\ddot{\theta}$$

خطا تأثير القوتين $\vec{P}$ و $\vec{T}$ يتقاطعان مع محور الدوران (Δ) : $M_\Delta(\vec{P}) = M_\Delta(\vec{T}) = 0$

$$-C.\theta = J_\Delta.\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}.\theta = 0$$

2- إثبات التعبير العددي للسرعة الزاوية :



الشكل 5

حل المعادلة الزمنية يكتب : $\theta(t) = \theta_m \cos(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi)$

اشتقاق الافصول الزاوي :

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}(t) = -\frac{2\pi}{T_0}.\theta_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$$

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi + \pi\right)$$

مبيانيا قيمة الدور الخاص : $T_0 = 1,25\, s$ ومنه:

$$\frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1,25} = 1,6\pi$$

مع$\dot{\theta}_m = \frac{2\pi}{T_0}.\theta_m = 1,6\pi\times\frac{\pi}{4} = 3,95 \approx 4\, rad.s^{-1}$: $\dot{\theta}_m \le \dot{\theta} \le -\dot{\theta}_m$

عند اللحظة $t = 0$ لدينا :

$$\begin{cases} \dot{\theta}(0) = -\dfrac{2\pi}{T_0}.\theta_m \sin\varphi \\ \dot{\theta}(0) = -\dfrac{\dot{\theta}_m}{2} \end{cases} \Rightarrow -\dot{\theta}_m sin\varphi = -\frac{\dot{\theta}_m}{2} \Rightarrow sin\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow sin\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\varphi = \pm\frac{\pi}{6} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$$ السرعة سالبة $(\dot{\theta}(0) < 0)$

تعبير السرعة الزاوية :

$$\dot{\theta}(t) = 4.\sin\left(1,6\pi t + \frac{\pi}{6} + \pi\right) \Rightarrow \dot{\theta}(t) = 4.\sin\left(1,6\pi t + \frac{7\pi}{6}\right)$$

2-2- تحديد قيمة C :

حسب تعبير الدور الخاص لنواس اللي :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}} \Rightarrow {T_0}^2 = 4\pi^2.\frac{J_\Delta}{C} \Rightarrow C = 4\pi^2.\frac{J_\Delta}{{T_0}^2}$$

تطبيق عددي :

$$C = 4\pi^2 \times \frac{4.10^{-4}}{1,25^2} = 1,01.10^{-2}\ N.m^{-1}$$

3- الطاقة الميكانيكية للمتذبذب :

باعتبار الاحتكاكات مهملة ،فإن الطاقة الميكانيكية للنواس تنحفظ :

$$E_m = E_c + E_{pt} = \frac{1}{2}J_\Delta.\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C.\theta^2$$

عندما تكون الطاقة الحركية قصوية E_{cmax} تكون طاقة وضع اللي منعدمة $E_{pt\,min}$ والعكس صحيح.

$$E_m = \frac{1}{2}J_\Delta.{\dot{\theta}_m}^2 \Rightarrow E_m = \frac{1}{2}\times 4\times 10^{-4}\times 4^2 = 3,2.10^{-3}\ J \Rightarrow E_m = 3,2\ mJ$$

استنتاج طاقة وضع اللي عند اللحظة $t = 0$:

الطاقة الميكانيكية تنحفظ :

$$E_m = E_{m0} = E_{c0} + E_{pt0} \Rightarrow E_{pt0} = E_m - E_{co}$$

مبيانيا حسب الشكل 5 نجد : $\dot{\theta}(0) = -\frac{\dot{\theta}_m}{2}$

$$E_{pt0} = E_m - E_{co} = \frac{1}{2}J_\Delta.{\dot{\theta}_m}^2 - \frac{1}{2}J_\Delta.\dot{\theta}(0)^2 = \frac{1}{2}J_\Delta.\left({\dot{\theta}_m}^2 - \frac{1}{4}{\dot{\theta}_m}^2\right) = \frac{3}{4}.\frac{1}{2}J_\Delta.{\dot{\theta}_m}^2 = \frac{3}{4}.E_m$$

$$E_{pt0} = \frac{3}{4}\times 3,2.10^{-3} = 2,4.10^{-3}\ J \Rightarrow E_{pt0} = 2,4\ mJ$$