حساب الاحتمالات

تمرين1

يحتوي صندوق على 5 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء و كرة حمراء.

نسحب من الصندوق 4 كرات .

حدد في كل حالة

أ- عدد السحبات الممكنة ؟

ب- عدد السحبات لتكون من بين الكرات كرة سوداء فقط ؟

ج- عدد السحبات لتكون من بين الكرات كرة سوداء على الأقل ؟

د- عدد السحبات لتكون من بين الكرات كرة سوداء على الأكثر ؟

1- تآنيا   2- بالتتابع بإحلال   3- بالتتابع بدون إحلال

الحل

1- تآنيا

أ- عدد السحبات الممكنة

$$card\,\Omega = C_9^4 = \frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1} = 126$$

ب- نعتبر الحدث A :" الحصول على كرة سوداء فقط "

$$cardA = C_3^1 \times C_6^3 = 3\times20 = 60$$

ج- نعتبر الحدث B :" الحصول على كرة سوداء على الأقل "

$$cardB = C_3^1\times C_6^3 + C_3^2\times C_6^2 + C_3^3\times C_6^1 = 3\times20+3\times15+6$$

$$cardB = 111$$

$\overline{B}$: عم الحصول على أي كرة سوداء : $card\,\overline{B} = C_6^4 = 15$

$$cardB = 126-15 = 111$$

د- نعتبر الحدث C :" الحصول على كرة سوداء على الأكثر "

$$cardC = C_3^1\times C_6^3 + C_6^4 = 60+15 = 75$$

2- بالتتابع بإحلال

أ- عدد السحبات الممكنة

$$card\,\Omega = 9^4 = 6561$$

ب- نعتبر الحدث A :" الحصول على كرة سوداء فقط "

A : $C_4^1 nqqq$

$$cardA = 4\times3\times6^3$$

$$cardA = 2592$$

ج- نعتبر الحدث B :" الحصول على كرة سوداء على الأقل "

$\overline{B}$: عم الحصول على أي كرة سوداء : $card\,\overline{B} = 6^4 = 1296$

$$cardB = 1296-6561 = 5265$$

د- نعتبر الحدث C :" الحصول على كرة سوداء على الأكثر "

A : $C_4^1 nqqq$ أو $qqqq$

$$cardC = 2592+1296 = 3888$$

3- بالتتابع بدون إحلال

أ- عدد السحبات الممكنة

$$card\,\Omega = A_9^4 = 9\times8\times7\times6 = 3024$$

ب- نعتبر الحدث A :" الحصول على كرة سوداء فقط "

A : $C_4^1 nqqq$

$cardA = 4\times3\times A_6^3$

$cardA = 1440$

ج- نعتبر الحدث B :" الحصول على كرة سوداء على الأقل "

$\overline{B}$: عم الحصول على أي كرة سوداء : $card\overline{B} = A_6^4 = 360$

$cardB = 3024 - 360 = 2664$

د- نعتبر الحدث C :" الحصول على كرة سوداء على الأكثر "

A : $C_4^1 nqqq$ أو $qqqq$

$cardC = 1440 + 360 = 1800$

تمرين2

من الأرقام : 2-3-4-5-6-7 كون عددا من ثلاثة أرقام .

أ - كم من عدد زوجي يمكن تكوينه ؟

ب- كم من عدد قابل للقسمة على 5 يمكن تكوينه ؟

الحل

أ - qqp : $6\times6\times3$

ب - $qq5$: $6\times6\times1$

تمرين3

أ - كم يوجد من عدد مكون من 5 أرقام ؟

ب - من بين هذه الأعداد كم يوجد من عدد يحتوي على رقم زوجي على الأقل ؟

الحل

أ - 9×10^4

ب - عدد الأعداد الذي لا يحتوي على أي رقم زوجي : 5^5

عدد الأعداد الذي يحتوي على رقم زوجي على الأقل : $9\times10^4 - 5^5$

الاحتمال

تمرين4

يحتوي صندوق على 3 قطع نقدية

نسحب واحدة ثم نرميها ونسحب أخرى ثم نرميها

1- ما هو عدد النتائج الممكنة ؟

2- احسب احتمال ظهور الوجه F

الحل

1- عدد النتائج الممكنة

$card\,\Omega = C_3^1\times2\times C_2^1\times2 = 24$

2- نعتبر الحدث A :" ظهور الوجه F "

$\overline{A}$:"عدم ظهور الوجه F "

$card\,\overline{A} = C_3^1\times1\times C_2^1\times1 = 6$

$cardA = card\,\Omega - card\,\overline{A} = 24 - 6 = 18$

$$p(A) = \frac{18}{24}$$

تمرين5

يحتوي صندوق على 3 نرود

نسحب واحدا ثم نرميه ونسحب آخر ثم نرميه

1- ما هو عدد النتائج الممكنة ؟

2- احسب احتمال ظهور الرقم 4

الحل

1- عدد النتائج الممكنة

$card\,\Omega = C_3^1\times6\times C_2^1\times6 = 216$

2- نعتبر الحدث A :" ظهور الرقم 4"

$\overline{A}$:"عدم ظهور الرقم 4"

$card\,\overline{A} = C_3^1\times5\times C_2^1\times5 = 150$

$cardA = card\,\Omega - card\,\overline{A} = 216 - 150 = 66$

$$p(A) = \frac{66}{216}$$

تمرين6

نرمي نردين في آن واحد

1- ما هو عدد النتائج الممكنة ؟

2- احسب احتمال ظهور الرقم 4

الحل

1- عدد النتائج الممكنة

$card\,\Omega = C_6^1\times C_6^1 = 36$

2- نعتبر الحدث A :" ظهور الرقم 4"

$\overline{A}$:"عدم ظهور الرقم 4"

$card\,\overline{A} = 5\times5 = 25$

$cardA = card\,\Omega - card\,\overline{A} = 36 - 25 = 11$

$$p(A) = \frac{11}{36}$$

تمرين7

يحتوي صندوق على 3 نرود

نختار تآنيا نردين ثم نرميهما في آن واحد

1- ما هو عدد النتائج الممكنة ؟

2- احسب احتمال ظهور الرقم 4

الحل

1- عدد النتائج الممكنة

$card\,\Omega = C_3^2\times6\times6 = 108$

2- نعتبر الحدث A :" ظهور الرقم 4"

$\overline{A}$:"عدم ظهور الرقم 4"

$card\,\overline{A} = C_3^2\times5\times5 = 75$

$cardA = card\,\Omega - card\,\overline{A} = 108 - 75 = 33$

$$p(A) = \frac{33}{108}$$

تمرين8

يحتوي كيس على 10 بيدقات تحمل الأرقام : 0 ؛ 1 ؛ ... ؛ 9

الأرقام : 0 ؛ 1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 4 مكتوبة بالأحمر

الأرقام : 5 ؛ 6 ؛ 7 مكتوبة بالأزرق

الأرقام : 8 ؛ 9 مكتوبة بالأصفر

حدد في كل حالة الاحتمال لتكون :

أ- الأرقام زوجية ؟

ب- الأرقام لها نفس اللون ؟

1- تآنيا 2- بالتتابع بإحلال 3- بالتتابع بدون إحلال

الحل

1- تآنيا

$card\,\Omega = C_{10}^{3} = 120$

أ- نعتبر الحدث A : " الأرقام زوجية "

$cardA = C_{5}^{3} = 10$

$p(A) = \dfrac{10}{120}$

ب- نعتبر الحدث B : " الأرقام لها نفس اللون "

$cardB = C_{5}^{3} + C_{3}^{3} = 10 + 1 = 11$

$p(B) = \dfrac{11}{120}$

2- بالتتابع بدون إحلال

$card\,\Omega = A_{10}^{3} = 720$

أ- نعتبر الحدث A : " الأرقام زوجية "

$cardA = A_{5}^{3} = 60$

$p(A) = \dfrac{60}{720}$

ب- نعتبر الحدث B : " الأرقام لها نفس اللون "

$cardB = A_{5}^{3} + A_{3}^{3} = 60 + 6 = 66$

$p(B) = \dfrac{66}{720}$

3- بالتتابع بإحلال

$card\,\Omega = 10^{3}$

أ- نعتبر الحدث A : " الأرقام زوجية "

$cardA = 5^{3}$

$p(A) = \dfrac{5^{3}}{10^{3}} = \dfrac{1}{8}$

ب- نعتبر الحدث B : " الأرقام لها نفس اللون "

$cardB = 5^{3} + 3^{3} + 2^{3} = 125 + 27 + 8 = 160$

$p(B) = \dfrac{160}{1000} = \dfrac{4}{25}$

تمرين9

يحتوي كيس A على كرتين صفراوين و 3 كرات خضراء و 5 كرات حمراء و يحتوي كيس B على 4 كرات خضراء

نسحب تآنيا كرتين من الكيس A و نضعهما في الكيس B

ثم نسحب تآنيا كرتين من الكيس B

احسب احتمال الحصول على كرتين خضراوين بالضبط

الحل

$card\,\Omega = C_{10}^{2} \times C_{6}^{2} = 675$

نعتبر الحدث C : " الحصول على كرتين خضراوين بالضبط "

$q = R\ ou\ J$

C : $2q\ puis\ 2V\ \ ou\ \ q\ et\ 1V\ \ puis\ 2V\ \ ou\ \ 2V\ \ puis\ 2V$

$cardC = C_{7}^{2} \times C_{4}^{2} + C_{7}^{1} \times C_{3}^{1} \times C_{5}^{2} + C_{3}^{2} \times C_{6}^{2}$

$cardC = 381$

$p(A) = \dfrac{381}{675}$

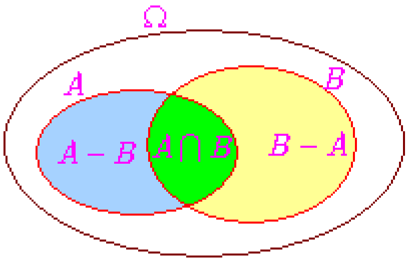
تمرين10

A و B حدثان بحيث :

$P(A \cap B) = 1/6 ; P(B) = 1/4 ; P(A) = 1/3$

احسب : $P_{A}(\overline{B}) ; P_{A}(B) ; P(\overline{A} \cup B) ; P(A \cup \overline{B}) ; P(A \cup B)$

الحل



$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = \dfrac{5}{12}$

$P(A \cap \overline{B}) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

$\boxed{P(A \cap \overline{B}) = \dfrac{1}{6}}$

$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \dfrac{3}{4}$

$P(A \cup \overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B})$

$\boxed{P(A \cup \overline{B}) = \dfrac{11}{12}}$

$\boxed{P_{A}(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{1}{2}}$

$$\boxed{P_A\left(\overline{B}\right) = \frac{P\left(A\cap\overline{B}\right)}{P\left(A\right)} = \frac{1}{2}}$$

تمرين 11

يحتوي صندوق على 6 كرات سوداء و 3 حمراء.
نسحب من الصندوق كرتين بالتتابع بدون إحلال .
نعتبر : الحدث A : " الكرة الأولى سوداء "
الحدث B : " الكرة الثانية حمراء "

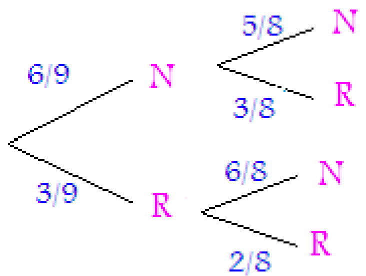
أ – حدد : $P\left(A\cap B\right);P\left(B\right);P\left(A\right)$

ب- هل A و B مستقلان ؟

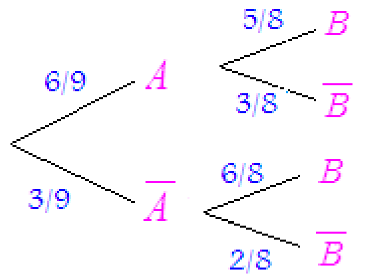
ج- احسب : $P_B\left(A\right)$ ، $P\left(A\cup B\right)$ ، $P\left(\overline{A}\cap B\right)$

الحل

الطريقة 1 : باستعمال شجرة الاحتمالات



أو



$$P\left(A\right) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$P\left(B\right) = P\left(A\right)P_A\left(B\right) + P\left(\overline{A}\right)P_{\overline{A}}\left(B\right)$$

$$P\left(B\right) = \frac{6}{9}\times\frac{3}{8} + \frac{3}{9}\times\frac{2}{8} = \frac{1}{3}$$

$$P\left(A\cap B\right) = P\left(A\right)P_A\left(B\right) = \frac{6}{9}\times\frac{3}{8} = \frac{1}{4}$$

الطريقة 2 : بدون استعمال شجرة الاحتمالات

أ – $card\Omega = 9\times 8 = 72$

الحدث A : NX (X سوداء أو حمراء)

$card\left(A\right) = 6\times 8 = 48$

$p\left(A\right) = \frac{48}{72} = \frac{2}{3}$ أو مباشرة $\boxed{p\left(A\right) = \frac{2}{3}}$

الحدث B : NR أو RR

$card\left(B\right) = 3\times 2 + 6\times 3 = 24$

$p\left(B\right) = \frac{24}{72} = \frac{1}{3}$ أو مباشرة

$p\left(B\right) = \frac{3}{9}\times\frac{2}{8} + \frac{6}{9}\times\frac{3}{8}$

إذن: $\boxed{p\left(B\right) = \frac{1}{3}}$

الحدث $A\cap B$: " الأولى سوداء و الثانية حمراء " NR

إذن: $P\left(A\cap B\right) = \frac{6\times 3}{9\times 8}$

و منه : $\boxed{P\left(A\cap B\right) = \frac{1}{4}}$

نعلم أن : $P_A\left(B\right) = \frac{p\left(A\cap B\right)}{p\left(A\right)}$

إذن: $P_A\left(B\right) = \frac{3}{8}$

ب- A و B غير مستقلان

لأن : $P\left(A\cap B\right) \neq P\left(A\right)\times P\left(B\right)$

أو لأن : $p_A\left(B\right) \neq p\left(B\right)$

ج- نعلم أن : $P_B\left(A\right) = \frac{p\left(A\cap B\right)}{p\left(B\right)}$

إذن: $\boxed{P_B\left(A\right) = \frac{3}{4}}$

نعلم أن :

$P\left(A\cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(A\cap B\right)$

إذن: $\boxed{P\left(A\cup B\right) = \frac{3}{4}}$

نعلم أن : $P\left(\overline{A}\cap B\right) = P\left(B - A\right)$

و : $P\left(B - A\right) = P\left(B\right) - P\left(A\cap B\right)$

إذن: $P\left(\overline{A}\cap B\right) = P\left(B\right) - P\left(A\cap B\right)$

و منه : $\boxed{P\left(\overline{A}\cap B\right) = \frac{1}{12}}$

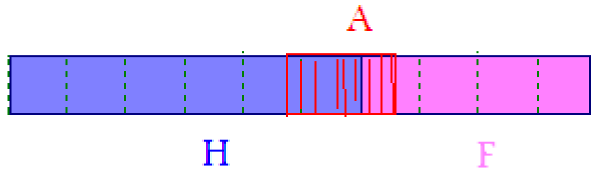
تمرين 12

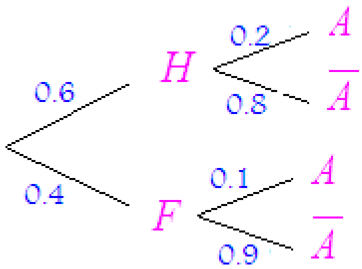
يتكون مجتمع من 60% من الرجال و 40% من النساء

20% من الرجال يتكلمون الأنجليزية و 10% من النساء يتكلمون الأنجليزية
اخترنا عشوائيا شخصا من هذا المجتمع
ما هو الاحتمال لكي يكون هذا الشخص
أ - رجلا و يتكلم الأنجليزية ؟
ب- رجلا و لا يتكلم الأنجليزية ؟
ج - امرأة و تتكلم الأنجليزية ؟
د - علما أن هذا الشخص يتكلم الإنجليزية ما هو الاحتمال أن يكون امرأة ؟

الحل

$A=(H\cap A)\cup(F\cap A)$ ، $(H\cap A)\cap(F\cap A)=\varnothing$





H: رجل $p(H)=0.6$

F: امرأة $p(F)=0.4$

A : أنجليزية

$P_H(A)=0.2$ ، $P_F(A)=0.1$

أ - رجل و يتكلم الأنجليزية : $p(A\cap H)$

$$p(A\cap H)=P_H(A)\times p(H)=0.2\times 0.6=0.12$$

$$\boxed{p(A\cap H)=0.12}$$

ب- رجل و لا يتكلم الأنجليزية : $p(\overline{A}\cap H)$

$$p(\overline{A}\cap H)=P(H)-P(A\cap H)=0.6-0.12$$

$$\boxed{p(\overline{A}\cap H)=0.48}$$

أو : $p(\overline{A}\cap H)=P_H(\overline{A})\times p(H)=0.8\times 0.6=0.48$

ج - امرأة و تتكلم الأنجليزية : $p(A\cap F)$

$$p(A\cap F)=P_F(A)\times p(F)=0.1\times 0.4=0.04$$

$$\boxed{p(A\cap F)=0.04}$$

د - علما أن هذا الشخص يتكلم الإنجليزية ما هو الاحتمال أن يكون امرأة ؟ : $P_A(F)$

$$p(A)=p(H)p_H(A)+p(F)p_F(A)$$

أو $p(A)=p(A\cap H)+p(A\cap F)$

$$\boxed{p(A)=0.16}$$

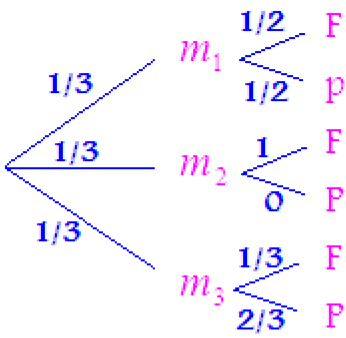
$$P_A(F)=\frac{p(A\cap F)}{p(A)}=\frac{0.04}{0.16}$$

$$\boxed{P_A(F)=0.25}$$

تمرين13

يحتوي صندوق على قطعة نقدية m_1 غير مغشوشة و قطعة m_2 سجل على وجهيها F و قطعة m_3 بحيث احتمال الحصول على الوجه F هو $\frac{1}{3}$
نسحب عشوائيا قطعة من الصندوق ثم نرميها
1- احسب احتمال الحصول على الوجه F
2- علما أننا حصلنا على الوجه F فما هو الاحتمال أن تكون القطعة المسحوبة هي m_3

الحل



$$P(m_1)=P(m_2)=P(m_3)=\frac{1}{3}$$

$$P_{m_1}(F)=\frac{1}{2} \text{ ، } P_{m_2}(F)=1 \text{ ، } P_{m_3}(F)=\frac{1}{3}$$

-1 $P(F)=P(m_1)P_{m_1}(F)+P(m_2)P_{m_2}(F)+P(m_3)P_{m_3}(F)$

$$P(F)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{3}\right)$$

$$\boxed{P(F)=\frac{11}{18}}$$

2- علما أننا حصلنا على الوجه F فما هو الاحتمال أن تكون القطعة المسحوبة هي m_3 : $P_F(m_3)$

$$p_{m_3}(F)=\frac{p(m_3\cap F)}{p(m_3)}\Rightarrow p(m_3\cap F)=p_{m_3}(F)\,p(m_3)$$

$$\boxed{p(m_3\cap F)=\frac{1}{9}}$$

$$P_F(m_3)=\frac{p(m_3\cap F)}{p(F)}=\frac{1}{9}\times\frac{18}{11}$$

$$\boxed{P_F(m_3)=\frac{2}{11}}$$

تمرين14

يحتوي صندوق C_1 على 5 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء

يحتوي صندوق C_2 على 3 كرات بيضاء و 2 كرات سوداء

يحتوي صندوق C_3 على 4 كرات بيضاء و 6 كرات سوداء

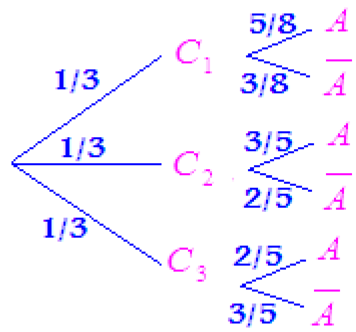
نختار عشوائيا صندوقا ثم نسحب منه كرتا

نفترض أن لجميع الصناديق و جميع الكرات نفس الاحتمال

1- احسب احتمال الحصول على كرة بيضاء

2- إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء فما هو الاحتمال أن تكون من الصندوق C_2 ؟

الحل



نعتبر الحدث C_i: اختيار الصندوق C_i $\quad 1\le i\le 3$

$$p(C_i)=\frac{1}{3}\quad 1\le i\le 3$$

1 - نعتبر الحدث A: الحصول على كرة بيضاء

$p_{C_1}(A)=\frac{5}{8}$ و $p_{C_2}(A)=\frac{3}{5}$ و $p_{C_3}(A)=\frac{4}{10}$

$$p(A)=p(C_1)p_{C_1}(A)+p(C_2)p_{C_2}(A)+p(C_3)p_{C_3}(A)$$

$$\boxed{p(A)=\frac{65}{120}}$$

2- إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء فما هو الاحتمال أن تكون من الصندوق C_2 : $P_A(C_2)$

$$p_{C_2}(A)=\frac{p(C_2\cap A)}{p(C_2)}\Rightarrow p(C_2\cap A)=p_{C_2}(A)\,p(C_2)$$

$$\boxed{p(C_2\cap A)=\frac{1}{5}}$$

$$P_A(C_2)=\frac{p(C_2\cap A)}{p(A)}=\frac{1}{5}\times\frac{120}{65}$$

$$\boxed{P_A(C_2)=\frac{24}{65}}$$

المتغيرات العشوائية

تمرين15

نرمي قطعة نقدية 3 مرات متتالية

X : " المتغير العشوائي الذي يربط كل نتيجة بعدد المرات التي يظهر فيها الوجه P "

1- حدد $cad\Omega$ ؛ $X(\Omega)$

2- حدد قانون احتمال X

3- احسب : $\sigma(X);V(X);E(X)$

4- حدد دالة التجزيئ ثم مثلها

الحل

1- $card\Omega=2^3=8$

$$\Omega=\{FFF;FFP;FPF;PFF;FPP;PFP;PPF;PPP\}$$

$$X(\Omega)=\{0;1;2;3\}$$

2- $(X=0)=\{FFF\}$ إذن : $P(X=0)=\frac{1}{8}$

$(X=1)=\{FFP;FPF;PFF\}$

إذن : $P(X=1)=\frac{3}{8}$

نجد : $P(X=2)=\frac{3}{8}$ ؛ $P(X=3)=\frac{1}{8}$

$X(\Omega)$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

3- $E(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}$

$$E(X)=\frac{3}{2}$$

$$V(X)=\frac{1}{8}\times\left(0-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{3}{8}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)^2+$$

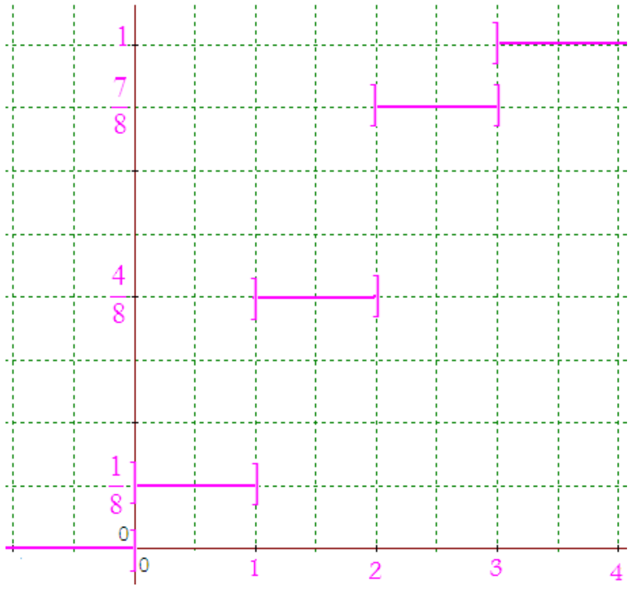
$$\frac{3}{8}\times\left(2-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{8}\times\left(3-\frac{2}{3}\right)^2$$

Abouelouafa Lakhouaja

$\sigma(X)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ؛ $V(X)=\dfrac{3}{4}$

4- دالة التجزيئ F

$$\begin{cases} F(x)=0 & x\in\left]-\infty;0\right] \\ F(x)=\dfrac{1}{8} & x\in\left]0;1\right] \\ F(x)=\dfrac{4}{8} & x\in\left]1;2\right] \\ F(x)=\dfrac{7}{8} & x\in\left]2;3\right] \\ F(x)=1 & x\in\left]3;+\infty\right[\end{cases}$$



تمرين16

يحتوي كيس على 5 كرات مرقمة من 0 إلى 4
سحبنا في آن واحد كرتين من الكيس .
X **: المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بمجموع الرقمين المحصل عليهما .**
1 - حدد قانون احتمال X
2- احسب : $\sigma(X);V(X);E(X)$
3- حدد دالة التجزيئ ثم مثلها

الحل

1- $card\Omega=C_5^2=10$

$X(\Omega)=\{1;2;3;4;5;6;7\}$

$X(\Omega)$	1	2	3	4	5	6	7
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

2- حساب : $\sigma(X);V(X);E(X)$

$$E(X)=1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{2}{10}+4\times\frac{2}{10}+5\times\frac{2}{10}+6\times\frac{1}{10}+7\times\frac{1}{10}$$

$$\boxed{E(X)=4}$$

$$V(X)=\frac{1}{10}\times(1-4)^2+\frac{1}{10}\times(2-4)^2+\frac{2}{10}\times(3-4)^2+\frac{2}{10}\times(4-4)^2$$
$$+\frac{2}{10}\times(5-4)^2+\frac{1}{10}\times(6-4)^2+\frac{1}{10}\times(7-4)^2$$

$\sigma(X)=\sqrt{3}$ ؛ $V(X)=3$

3- دالة التجزيئ F

$$\begin{cases} F(x)=0 & x\in\left]-\infty;1\right] \\ F(x)=\dfrac{1}{10} & x\in\left]1;2\right] \\ F(x)=\dfrac{2}{10} & x\in\left]2;3\right] \\ F(x)=\dfrac{4}{10} & x\in\left]3;4\right] \\ F(x)=\dfrac{6}{10} & x\in\left]4;5\right] \\ F(x)=\dfrac{8}{10} & x\in\left]5;6\right] \\ F(x)=\dfrac{9}{10} & x\in\left]6;7\right] \\ F(x)=1 & x\in\left]7;+\infty\right[\end{cases}$$

تمرين17

يحتوي صندوق على 5 كرات بيضاء و 12 سوداء و 3 حمراء .
نسحب 8 كرات بالتتابع بإحلال
نعتبر الحدث B **: " الحصول على 6 كرات بيضاء بالضبط "**
احسب : $P(B)$
نعتبر : X **: " عدد المرات التي تكون فيها الكرة بيضاء "**
احسب : $P(X=6)$ ؛ $E(X)$ ؛ $V(X)$

الحل

مباشرة :

B **هو :** $C_8^6 bbbbbbqq$

q **من بين :** $R;N$ **و عددهم : 15**

$card\Omega=20^8$ ؛ $cardB=C_8^6 5^6 15^2$

$$P(B)=\frac{C_8^6 5^6 15^2}{20^8}$$

$$P(B)=C_8^6\left(\frac{5}{20}\right)^6\left(\frac{15}{20}\right)^2$$

باستعمال المتغير العشوائي الحداني

الاختبار هو سحب كرة واحدة .
يعاد الاختبار $n=8$ مرة .
A : " الحصول على كرة بيضاء "
B : " وقوع A $k=6$ مرة "

$$P(A)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$$

$$P(B)=P(X=6)=C_8^6\left(\frac{1}{4}\right)^6\left(1-\frac{1}{4}\right)^{8-6}$$

$$P(B)=P(X=6)=C_8^6\left(\frac{1}{4}\right)^6\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

X متغير عشوائي حداني وسيطاه $n=8$ و $p=\frac{1}{4}$

إذن : $E(X)=8\times\frac{1}{4}$

$$V(X)=8\times\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}$$

تمرين 18

يحتوي صندوق على 5 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء و 2 حمراء.
نسحب من الصندوق 5 كرات .
X : " المتغير العشوائي الذي يربط كل نتيجة بمجموع الكرات البيضاء "
الحدث A : " الحصول على كرة بيضاء على الأقل "
1- حدد : $X(\Omega)$
2- احسب : $cardA$ $p(X=2)$ في كل حالة :
أ- تآنيا ب- بالتتابع بإحلال ج- بالتتابع بدون إحلال

الحل

1- $X(\Omega)=\{0;1;2;3;4;5\}$

2-

أ- السحب تآنيا : $\boxed{card\Omega=C_{11}^5}$

نعتبر الحدث $\overline{A}$: " عدم الحصول على أي كرة بيضاء "

لدينا : $card\overline{A}=C_6^5$

إذن: $\boxed{cardA=C_{11}^5-C_6^5}$

$$\boxed{p(X=2)=\frac{C_5^2\times C_6^3}{C_{11}^5}}$$

ب- السحب بالتتابع بإحلال : $\boxed{card\Omega=11^5}$

نعتبر الحدث $\overline{A}$: " عدم الحصول على أي كرة بيضاء "

لدينا : $card\overline{A}=6^5$

إذن: $\boxed{cardA=11^5-6^5}$

$$\boxed{p(X=2)=C_5^2\left(\frac{5}{11}\right)^2\left(\frac{6}{11}\right)^3}$$

أو : $\boxed{p(X=2)=C_5^2\frac{5^2 6^3}{11^5}}$

ج - السحب بالتتابع بدون إحلال : $\boxed{card\Omega=A_{11}^5}$

نعتبر الحدث $\overline{A}$: " عدم الحصول على أي كرة بيضاء "

لدينا : $card\overline{A}=A_6^5$

إذن: $\boxed{cardA=A_{11}^5-A_6^5}$

$$\boxed{p(X=2)=C_5^2\frac{A_5^2A_6^3}{A_{11}^5}}$$

تمرين 19

n عدد صحيح طبيعي أكبر أو يساوي 20
يحتوي كيس على 10 كرة بيضاء و $n-10$ كرة سوداء
نسحب كرة من الكيس نسجل لونها ثم نعيدها إلى الكيس
نكرر التجربة n مرة
p_K هو احتمال الحصول على k كرة بيضاء $0\le k\le n$
1- احسب : p_K بدلالة n و k
2- نضع : $u_k=\frac{p_{k+1}}{p_k}$ $0\le k\le n-1$
أ- بين أن : $u_k=\frac{n-k}{k+1}\times\frac{10}{n-10}$
ب- بين أن : $0\le k\le 9\Leftrightarrow u_k\ge 1$
$10\le k\le n-1\Leftrightarrow u_k\le 1$
ج- استنتج اكبر قيمة M للعدد p_K $0\le k\le n$
و بين أن : $M=\frac{n!}{n^n}\times\frac{10^{10}}{10!}\times\frac{(n-10)^{n-10}}{(n-10)!}$

الحل

1- $p_K=C_n^k\left(\frac{10}{n}\right)^k\left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-k}$

2- $u_k=\frac{p_{k+1}}{p_k}$ $0\le k\le n-1$

أ- $u_k=\frac{p_{k+1}}{p_k}$ $\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k}=\frac{n-k}{k+1}$

$$u_k = \frac{C_n^{k+1}\left(\frac{10}{n}\right)^{k+1}\left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-(k+1)}}{C_n^{k}\left(\frac{10}{n}\right)^{k}\left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-k}}$$

$$\boxed{u_k = \frac{n-k}{k+1}\times\frac{10}{n-10}}$$

ب- نبين أن : $0 \le k \le 9 \Leftrightarrow u_k \ge 1$

$$u_k \ge 1 \Leftrightarrow k \le \frac{10}{n}+9$$

بما أن : $n \ge 20$ فإن : $\frac{10}{n} \le \frac{1}{2}$

$$u_k \ge 1 \Leftrightarrow k \le \frac{10}{n}+9 \Leftrightarrow k \le \frac{1}{2}+9$$

بما أن : $k \in \mathbb{N}$ فإن : $u_k \ge 1 \Leftrightarrow 0 \le k \le 9$

$$\boxed{0 \le k \le 9 \Leftrightarrow u_k \ge 1}$$

- نبين أن : $10 \le k \le n-1 \Leftrightarrow u_k \le 1$

بنفس الطريقة

$$u_k \le 1 \Leftrightarrow k \ge \frac{1}{2}+9$$

بما أن : $k \in \mathbb{N}$ و $k \le n-1$

فإن : $u_k \le 1 \Leftrightarrow n-1 \ge k \ge 10$

$$\boxed{10 \le k \le n-1 \Leftrightarrow u_k \le 1}$$

ج- بما أن : $0 \le k \le 9 \Leftrightarrow u_k \ge 1$

فإن : $0 \le k \le 9 \Leftrightarrow p_{k+1} \ge p_k$

$$p_{10} \ge p_9 \ge \cdots \ge p_0$$

بما أن : $10 \le k \le n-1 \Leftrightarrow u_k \le 1$

فإن : $10 \le k \le n-1 \Leftrightarrow p_k \ge p_{k+1}$

$$p_{10} \ge p_{11} \ge \cdots \ge p_n$$

اكبر قيمة M للعدد p_K $0 \le k \le n$ هي p_{10}

$$\boxed{M = C_n^{10}\left(\frac{10}{n}\right)^{10}\left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-10}}$$

$$M = \frac{n!}{(n-10)!10!}\left(\frac{10}{n}\right)^{10}\left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-10}$$

$$\boxed{M = \frac{n!}{n^n}\times\frac{10^{10}}{10!}\times\frac{(n-10)^{n-10}}{(n-10)!}}$$

تمرين 20

نوزع 3 كرات مرقمة من 1 إلى 3 على 5 صناديق $E;D;C;B;A$ كل صندوق يمكن أن يحتوي على 3 كرات

X : المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الصناديق المملوءة

حدد قانون احتمال X

الحل

$$card(\Omega) = 5^3 = 125$$

- $3-0-0-0-0 \ : \ X = 1$

$$card(X=1) = C_5^1 = 5$$

$$\boxed{p(X=1) = \frac{5}{125} = \frac{1}{25}}$$

- $2-1-0-0-0 \ : \ X = 2$

$$card(X=2) = C_3^2 \times C_5^1 \times C_1^1 \times C_4^1 = 60$$

$$\boxed{p(X=2) = \frac{60}{125} = \frac{12}{25}}$$

- $1-1-1-0-0 \ : \ X = 3$

$$card(X=3) = C_3^3 \times C_5^3 \times A_3^3 = 60$$

$$\boxed{p(X=3) = \frac{12}{25}}$$

$X(\Omega)$	1	2	3
$P(X=x_i)$	1/25	12/25	12/25

تمرين 21

X متغير عشوائي بحيث : $x(\Omega) = \{0;1;2;3\}$

F دالة تجزيئ X بحيث : $\lim_{x \to 1^-} F(x) = \frac{1}{35}$

$$F(3) - F(1) = \frac{6}{7} \ ; \ F(2) = \frac{13}{35}$$

1 - حدد قانون احتمال X

2- حدد F دالة التجزيئ

الحل

1- نعتبر : $p_i = p(X=i)$

نعلم أن : $F(x) = p_0 \quad x \in \left]0;1\right]$

إذن : $\lim_{x \to 1^-} F(x) = p_0$

بما أن : $\lim_{x \to 1^-} F(x) = \frac{1}{35}$ فإن : $\boxed{p_0 = \frac{1}{35}}$

$$F(3) - F(1) = (p_0 + p_1 + p_2) - p_0 = p_1 + p_2$$

بما أن : $F(3) - F(1) = \frac{6}{7}$ فإن : $\boxed{p_1 + p_2 = \frac{6}{7}}$

$$F(2) = p_0 + p_1$$

Abouelouafa Lakhouaja

بما أن : $F(2)=\frac{13}{35}$ فإن : $\boxed{p_0+p_1=\frac{13}{35}}$

و لدينا حسب قانون الاحتمال : $\boxed{p_0+p_1+p_2+p_3=1}$

نجد :

$X(\Omega)$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

-2

$$\begin{cases} F(x)=0 & x\in\left]-\infty;0\right] \\ F(x)=\frac{1}{35} & x\in\left]0;1\right] \\ F(x)=\frac{13}{35} & x\in\left]1;2\right] \\ F(x)=\frac{31}{35} & x\in\left]2;3\right] \\ F(x)=1 & x\in\left]3;+\infty\right[\end{cases}$$

تمرين 22

نوزع n قرص مرقمة من 1 إلى n على m صندوق $A_1;\cdots;A_m$ كل صندوق يمكن أن يحتوي على n قراص

X : المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الصناديق المملوءة.

في كل حالة حدد قانون احتمال X

-1 $m=2\ ;\ n=4$ -2 $m=3\ ;\ n=5$

-3 $m=4\ ;\ n=5$ -4 $m=2\ ;\ n=6$

-5 $m=3\ ;\ n=6$ -6 $m=4\ ;\ n=8$

الحل

-1 $m=2\ ;\ n=4$ $card(\Omega)=2^4=16$

$$\left.\begin{matrix} 4-0\to 2 & =2 \\ 3-1\to C_4^3\times 2=8 \\ 2-2\to C_4^2 & =6 \end{matrix}\right\}=16$$

-2 $m=3\ ;\ n=5$ $card(\Omega)=3^5=243$

$$\left.\begin{matrix} 5-0-0\to 3 & =3 \\ 4-1-0\to C_5^4\times 3\times 2 & =30 \\ 3-2-0\to C_5^3\times 3\times 2 & =60 \\ 3-1-1\to C_5^3\times 3\times 2! & =60 \\ 2-2-1\to C_5^1\times 3\times C_4^2 & =90 \end{matrix}\right\}=243$$

-3 $m=4\ ;\ n=5$ $card(\Omega)=4^5=1024$

$$\left.\begin{matrix} 5-0-0-0\to 4 & =4 \\ 4-1-0-0\to C_5^4\times 4\times 3 & =60 \\ 3-2-0-0\to C_5^3\times 4\times 3 & =120 \\ 3-1-1-0\to C_5^3\times 4\times C_3^2\times 2! & =240 \\ 2-2-1-0\to C_5^1\times 4\times C_3^2\times C_4^2 & =360 \\ 2-1-1-1\to C_5^5\times 4\times 3! & =240 \end{matrix}\right\}=1024$$

-4 $m=2\ ;\ n=6$ $card(\Omega)=2^6=64$

$$\left.\begin{matrix} 6-0\to 2 & =2 \\ 5-1\to C_6^5\times 2 & =12 \\ 4-2\to C_6^4\times 2 & =30 \\ 3-3\to C_6^3 & =20 \end{matrix}\right\}=64$$

-5 $m=3\ ;\ n=6$ $card(\Omega)=3^6=729$

$$\left.\begin{matrix} 6-0-0\to 3 & =3 \\ 5-1-0\to C_6^5\times 3\times 2 & =36 \\ 4-2-0\to C_6^4\times 3\times 2 & =90 \\ 4-1-1\to C_6^4\times 3\times 2! & =90 \\ 3-2-1\to C_6^3\times 3\times C_3^2\times 2 & =360 \\ 3-3-0\to C_3^2\times C_6^3 & =60 \\ 2-2-2\to C_6^2\times C_4^2 & =90 \end{matrix}\right\}=729$$

-6 $m=4\ ;\ n=8$ $card(\Omega)=4^8=65536$

$$\left.\begin{matrix} 8-0-0-0\to 4 & =4 \\ 7-1-0-0\to C_8^7\times 4\times 3 & =96 \\ 6-2-0-0\to C_8^6\times 4\times 3 & =336 \\ 6-1-1-0\to C_8^6\times 4\times C_3^2\times 2! & =672 \\ 5-3-0-0\to C_8^5\times 4\times 3 & =672 \\ 5-2-1-0\to C_8^5\times 4\times C_3^2\times 3\times 2 & =4032 \\ 5-1-1-1\to C_8^5\times 4\times 3! & =1344 \\ 4-4-0-0\to C_4^2\times C_8^4 & =420 \\ 4-3-1-0\to C_8^4\times 4\times C_4^3\times 3\times 2 & =6720 \\ 4-2-2-0\to C_8^4\times 4\times C_3^2\times C_4^2 & =5040 \\ 4-2-1-1\to C_8^4\times 4\times C_4^2\times 3\times 2! & =10080 \\ 3-3-2-0\to C_8^2\times 4\times C_3^2\times C_6^3 & =6720 \\ 3-3-1-1\to C_4^2\times C_8^2\times 2!\times C_6^3 & =6720 \\ 3-2-2-1\to C_8^3\times 4\times C_5^1\times 3\times C_4^2 & =20160 \\ 2-2-2-2\to C_8^2\times C_6^2\times C_4^2 & =2520 \end{matrix}\right\}=65536$$

ملاحظة

عدد الكيفيات لتوزيع pn قرص على p خانة بحيث كل خانة تحتوي على n قرص بالضبط

$$\underbrace{n-n-\cdots-n-n}_{p\ fois} \to C_{pn}^{n}\times C_{(p-1)n}^{n}\times\cdots\times C_{2n}^{n}$$

أمثلة :

- توزيع 4 أقراص على 2 خانة بحيث كل خانة تحتوي على 2 أقراص بالضبط

$$2-2 \to C_4^2 \quad = 6$$

$$\left.\begin{matrix} 12-34 \\ 13-24 \\ 14-23 \end{matrix}\right\} \times 2 = \frac{C_4^2}{2}\times 2$$

- توزيع 6 أقراص على 2 خانات بحيث كل خانة تحتوي على 3 أقراص بالضبط

$$3-3 \to C_6^3 \quad = 20$$

$$\left.\begin{matrix} 123-456 \\ 124-356 \\ 125-346 \\ 126-345 \\ 134-256 \\ 135-246 \\ 136-245 \\ 145-236 \\ 146-235 \\ 156-124 \end{matrix}\right\} \times 2 = \frac{C_6^3}{2}\times 2$$

- توزيع 6 أقراص على 3 خانات بحيث كل خانة تحتوي على 2 أقراص بالضبط

$$2-2-2 \to C_6^2\times C_4^2 \quad = 90$$

$$\left.\begin{matrix} 12-34-56 \\ 13-26-45 \\ 14-25-36 \\ 15-24-36 \\ 16-23-45 \end{matrix}\right\} \frac{C_6^2}{3}\times 3! + \left.\begin{matrix} 12-36-45 \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \frac{C_6^2}{3}\times 3! + \left.\begin{matrix} 12-35-46 \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \frac{C_6^2}{3}\times 3!$$

- توزيع 8 أقراص على 4 خانات بحيث كل خانة تحتوي على 2 أقراص بالضبط

$$2-2-2-2 \to C_8^2\times C_6^2\times C_4^2 \quad = 2520$$

- توزيع 8 أقراص على 2 خانات بحيث كل خانة تحتوي على 4 أقراص بالضبط

$$4-4 \to C_8^4 \quad = 70$$

تمرين 23

نرمي نردا وجوهه مرقمة من 1 إلى 6 بحيث احتمالات ظهور وجوهه متناسبة مع الأرقام التي تحملها

-1 احسب احتمال ظهور كل وجه

-2 احسب احتمال ظهور رقم فردي

الحل

-1 $$P(1)=\frac{P(2)}{2}=\frac{P(3)}{3}=\frac{P(4)}{4}=\frac{P(5)}{5}=\frac{P(6)}{6}$$

$$P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)=1$$

إذن :

$$P(1)+2P(1)+3P(1)+4P(1)+5P(1)+6P(1)=1$$

$$P(1)=\frac{1}{21};P(2)=\frac{2}{21};P(3)=\frac{3}{21}$$

$$P(4)=\frac{4}{21};P(5)=\frac{5}{21};P(6)=\frac{6}{21}$$

-2 الحدث A : ظهور رقم فردي

$$P(A)=P(1)+P(3)+P(5)$$

$$\boxed{P(A)=\frac{9}{21}}$$