التمرين 1 :

يحتوي صندوق على أربع كرات بيضاء وثلاث كرات حمراء غير قابلة للتمييز باللمس. نسحب عشوائيا كرة من الصندوق ، نسجل لونها ثم نعيدها إلى الصندوق.
نجري نفس التجربة لمرات متتابعة إلى أن نحصل لأول مرة على كرتين متتابعتين من نفس اللون ونوقف التجربة.
ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي رتبة السحبة التي توقفت فيها التجربة.

1. أحسب احتمال كل حدث من الحدثين التاليين : $\left[X=2\right]$ و $\left[X=3\right]$.
2. ليكن k عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم.
بين أن احتمال الحدث $\left[X=2k\right]$ هو $p_{2k}=\frac{5}{8}\left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}$
وأن احتمال الحدث $\left[X=2k+1\right]$ هو $p_{2k+1}=\left(\frac{3}{16}\right)^{k}$.

التمرين 2 :

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا فرديا أكبر من أو يساوي 3.
لدينا n صندوقا مرقما من 1 إلى n. الصندوق رقم k حيث $0\leq k\leq n$، يحتوي على k كرة بيضاء و $n-k$ كرة سوداء.
نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق، ثم نسحب منه كرة واحدة.

1. أحسب احتمال الحصول على كرة بيضاء.
2. أحسب احتمال أن يتم السحب من صندوق رقمه فردي.
3. أحسب احتمال الحصول على كرة بيضاء، علما أن السحب تم من صندوق رقمه فردي.

التمرين 3 :

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 20.
يحتوي كيس على 10 كرات بيضاء و $n-10$ كرة سوداء.
نفترض أن جميع الكرات غير قابلة للتمييز باللمس.
نسحب كرة من الكيس ونسجل لونها ثم نعيدها إلى الكيس. نكرر هذه التجربة n مرة. نسمي p_k احتمال الحصول على k كرة بيضاء $0\leq k\leq n$.

1. نضع : $u_k=\frac{p_{k+1}}{p_k}$ حيث $k\in\left\{0,1,\dots,n\right\}$.
أ- بين أن : $u_k=\frac{n-k}{k+1}\times\frac{10}{n-10}$.
ب- بين أن : $u_k\geq 1 \Leftrightarrow 0\leq k\leq 9$ ،
وأن : $u_k\leq 1 \Leftrightarrow 10\leq k\leq n-1$
جـ- استنتج أكبر قيمة M للعدد p_k عندما يتغير k في $\left\{0,1,\dots,n\right\}$،
وبين أن : $M=\frac{n!}{n^n}\times\frac{10^{10}}{10!}\times\frac{(n-10)^{n-10}}{(n-10)!}$.

التمرين 4 :

نوزع بطريقة عشوائية أربع كرات غير قابلة للتمييز باللمس ومرقمة 1 و 2 و 3 و 4 على ستة أشخاص A و B و C و D و E و F. (كل شخص يمكنه أن يحصل على 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 كرات)

1. ما هو عدد إمكانيات توزيع الكرات الأربع على الأشخاص الستة ؟
2. أحسب احتمال أن يحصل الشخص A على كرة واحدة على الأقل.
3. أحسب احتمال الحدث التالي : " مجموع عددي الكرات المحصل عليها من طرف الشخصين B و C يساوي عدد الكرات المحصل عليها من طرف الشخص A ".

التمرين 5 :

يحتوي كيس على a كرة بيضاء و a كرة حمراء . نجري سلسلة من السحبات : في كل سحبة نأخذ عشوائيا كرة من الصندوق. إذا كانت حمراء نتوقف عن السحب وإذا كانت بيضاء نعيدها إلى الصندوق ونسحب كرة أخرى و هكذا دواليك.
لكل n من $\mathbb{N}^*$، نعتبر الحدث A_n : " الكرة المسحوبة في السحبة n حمراء" ، ونضع : $p_n=p\left(A_n\right)$.

1. أحسب الاحتمالين p_1 و p_2.
2. أ- أثبت أن : $p_{n+1}=\frac{1}{2}\left(1-\sum_{k=1}^{n}p_k\right) \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$.
ب- استنتج p_n بدلالة n .
3. ليكن q_n الاحتمال لكي لا نجري السحبة n.
بين أن $q_n=1-2p_n \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$ و استنتج q_n بدلالة n .

التمرين 6 :

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا و $n\geq 3$. نعتبر متسابقا يجب عليه أن يجتاز n حاجزا T_1 و T_2 و ... و T_n .
نفترض أن احتمال اجتياز الحاجز T_k بنجاح هو $\frac{1}{2^k}$ لكل k من $\left\{1,2,\dots,n\right\}$. (نفترض أن القفزات مستقلة فيما بينها).

1. ما هو احتمال أن يجتاز المتسابق جميع الحواجز بنجاح ؟
2. ما هو احتمال أن يفشل المتسابق فقط في اجتياز الحجز رقم m ؟
3. ما هو احتمال أن يفشل المتسابق في اجتياز حاجز واحد فقط ؟

التمرين 7 :

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين و n عددا من $\mathbb{N}^*$ بحيث $n\leq a\leq b$.
يحتوي صندوق على a كرة خضراء و b كرة حمراء. نسحب عشوائيا وفي آن واحد n كرة من الصندوق.

1. بين أن احتمال الحصول على اللونين الأخضر والأحمر هو :

$$p = \frac{1}{C_{a+b}^{n}} \sum_{k=1}^{n} C_a^k C_b^{n-k}$$

2. بين أن احتمال الحصول على لون واحد هو $q = \dfrac{C_a^n + C_b^n}{C_{a+b}^n}$.

استنتج أن : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} C_a^k C_b^{n-k} = C_{a+b}^n - \left(C_a^n + C_b^n\right)$

التمرين 8 :

يتم اختيار حارس مرمى كرة القدم بعد عدة اختبارات منها ضربات الجزاء. بعد سلسلة من ضربات الجزاء للحارس تبين أنه :

✓ إذا تصدى على لضربة الجزاء رقم n ، فإن احتمال أن يتصدى لضربة الجزاء رقم $n+1$ هو $0,8$.

✓ إذا لم يتصدى على لضربة الجزاء رقم n ، فإن احتمال أن يتصدى لضربة الجزاء رقم $n+1$ هو $0,6$.

✓ احتمال أن يتصدى على لضربة الجزاء الأولى هو $0,7$.

نعتبر الحدث A_n : " يتصدى على لضربة الجزاء رقم n ".

1. أ- أحسب الاحتمالات التالية : $p(A_1)$ و $p_{A_n}(A_{n+1})$ و $p_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$.

ب- أحسب الاحتمالات التالية : $p(A_{n+1} \cap A_n)$ و $p(A_{n+1} \cap \overline{A_n})$ بدلالة $p(A_n)$.

جـ- استنتج أن : $p(A_{n+1}) = 0,2\, p(A_n) + 0,6$.

2. لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نضع : $p_n = p(A_n)$

و : $u_n = p_n - 0,75$

أ- بين أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها $0,2$.

ب- استنتج u_n ثم p_n بدلالة n.

جـ- حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ ثم أعط تأويلا للنتيجة المحصلة.

التمرين 9 :

نعتبر قطعة نقدية غير متوازنة حيث احتمال ظهور الوجه F هو $\dfrac{3}{5}$

وصندوقا يحتوي على سبع كرات غير قابلة للتمييز باللمس: أربع كرات بيضاء وثلاث كرات سوداء.

نعتبر التجربة التالية : نرمي القطعة النقدية :

✓ إذا سقطت على الظهر P ، نسحب من الصندوق كرتين بالتتابع وبإحلال

✓ وإذا سقطت على الوجه F ، فإننا نسحب من الصندوق كرتين بالتتابع وبدون إحلال .

1. أحسب احتمال الحصول على كرتين لهما نفس اللون.
2. علما أن الكرتين المسحوبتين مختلفتا اللون ، أحسب احتمال سحبهما بالتتابع وبإحلال.
3. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات البيضاء المسحوبة .

أ- حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X ، ثم أعط قانون احتمال X .

ب- أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X.

جـ- أحسب المغايرة والانحراف الطرازي للمتغير العشوائي X .

د- حدد و أنشئ دالة التجزيء F .

التمرين 10 :

يحتوي كيس على خمس وردات صفراء تحمل الأرقام : $0 \;;\; 0 \;;\; 1 \;;\; 1 \;;\; 1$ ووردتين حمراوين تحملان الرقمين $0 \;;\; 1$ (لا يمكن التمييز بينها باللمس)

نسحب بالتتابع وبإحلال وردتين من الكيس .

1. ما هو عدد السحبات الممكنة ؟
2. أحسب احتمال كل من الأحداث التالية :

A: « الوردتين المسحوبتين من نفس اللون »

B: « الوردتين المسحوبتين من لونين مختلفين »

C: « جداء الرقمين المحصل عليهما يساوي 0 »

3. نكرر التجربة السابقة ثلاث مرات متتالية بحيث نعيد الوردتين المسحوبتين إلى الكيس بعد كل اختبار.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث A .

a) حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X .

b) حدد قانون احتمال X .

c) أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

d) أحسب المغايرة والانحراف الطرازي للمتغير العشوائي X .

التمرين 11 : *Formule de Bayes*

1. **Principe :** Dans un espace probabilisé fini , considérons deux événements A et B tels que :

$$p(B) \neq 0 \text{ et } p(\overline{B}) \neq 0 .$$

Montrer que la probabilité de B sachant A est déterminée par la formule dite de *Bayes* :

$$\boxed{p_A(B) = \frac{p(B)\times p_B(A)}{p(B)\times p_B(A) + p(\overline{B})\times p_{\overline{B}}(A)}}$$

avec $p(B) + p(\overline{B}) = 1$

2 .**Application :**

Dans un pays gravement touché par une épidémie (30% de la population est contaminée), on utilise un test de dépistage de la maladie.

On a constaté que si le test réagit positivement sur un individu, celui-ci a 90% de chances d'être malade ; si le test réagit négativement, l'individu a 80% de chances d'être en bonne santé.

On choisit au hasard une personne dans la population du pays et on lui administre le test. Celui-ci réagit positivement.

Quelle est la probabilité que l'individu soit malade ?