

العادية 2008

نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

و $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة

و $(\mathbb{C}, +, \times)$ جسم تبادلي. ونعتبر المجموعة

$$E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & \sqrt{3}b \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}b & a \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \text{ ونضع}$$

(1) أ. بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء حقيقي

ب. بين أن الأسرة (I, J) أساس للفضاء $(E, +, \cdot)$ وأعط بعده

(2) بين أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

(3) نعتبر التطبيق f المعرفة بما يلي:

$$f: \mathbb{C}^* \rightarrow E^* \text{ حيث } E^* = E - \{M(0, 0)\} \text{ حيث } z = a + ib \rightarrow M(a, b)$$

أ. بين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*, \times)$ نحو $(E^*, \times)$

ب. استنتج بنية $(E, +, \times)$

(4) حل في E المعادلة $J \times X^3 = I$

تمرين رقم 1

نعتبر في الفضاء المتجهي الحقيقي $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ المجموعة E للمصفوفات والتي تكتب على الشكل

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a + 2b \end{pmatrix} \text{ حيث } (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ ونضع}$$

(1) أ. بين أن $(E, +)$ زمرة تبادلية

ب. بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء حقيقي وأعط بعده

(2) أحسب J^2 بدلالة I, J

واستنتج الجداء $M(a, b) \times M(c, d)$

(3) نعتبر التطبيق f المعرفة بما يلي:

$$f: E \rightarrow \mathbb{C}$$

$$M(a, b) \rightarrow z = (a + b) + ib$$

أ. بين أن f تقابل وعرف تقابله العكسي

ب. بين أن f تشاكل من $(E, \times)$ نحو $(\mathbb{C}, \times)$

ج. استنتج بنية $(E, +, \times)$

د. حدد مقلوب M من E

م حدد في E حلول المعادلة $M^3 - 4I + 2J = \theta$

حيث θ هي المصفوفة المنعدمة في $M_2(\mathbb{R})$

يونيو 2000

$$(I) \text{ لكل } x, y \text{ من } E = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

نضع: $x * y = x + y - 2xy$

(1) بين أن سلطان قانون تركيب داخلي في E

(2) بين أن القانون سلطان تبادلي وتجميعي

(3) بين أن $(E, *)$ زمرة تبادلية

(4) بين أن: لكل x من E ولكل n من $\mathbb{N}^* - \{1\}$

$$x * x * x * \dots * x = \frac{1}{2} (1 - (1 - 2x)^n)$$

$$(II) \text{ نضع } A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \text{ } (\forall x \in E)$$

ونعتبر المجموعة $H = \{A(x) / x \in E\}$

(1) بين أن H جزء مستقر في $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

$$f: E \rightarrow H$$

(2) نعتبر التطبيق $x \rightarrow A(x)$

أ. بين أن f تشاكل تقابلي من $(E, *)$ نحو $(H, \times)$

ب. استنتج بنية $(H, \times)$

$$B = A\left(-\frac{1}{2}\right) \text{ نضع } \mathbb{N}^* \text{ عدد من } n \text{ ليكن}$$

$$B^n = A\left(\frac{1-2^n}{2}\right) \text{ و } (B^n)^{-1} = A\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \text{ بين أن}$$

تمرين رقم 2

$(F, +, \cdot)$ هو الفضاء الحقيقي لمجموعة

الدوال العددية المعرفة من $\mathbb{R}^*$ نحو $\mathbb{R}$.

لكل $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ولكل x من $\mathbb{R}^*$

$$\text{نضع } f_{(a,b)}(x) = x^a e^{bx} \text{ و } \varphi_{(a,b)}(x) = \ln(f_{(a,b)}(x))$$

ولتكن المجموعة $F = \{\varphi_{(a,b)} / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

(1) بين أن $(F, +)$ زمرة جزئية من $(F, +, \cdot)$

(2) أ. تحقق أن لكل $\varphi_{(a,b)}$ من F ولكل λ من $\mathbb{R}$

$$\lambda \cdot \varphi_{(a,b)} \in F \text{ لدينا:}$$

ب. استنتج أن $(F, +, \cdot)$ فضاء حقيقي

ج. بين أن $(\varphi_{(0,1)}; \varphi_{(1,0)})$ مولدة للفضاء F وحدد بعده