هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

2004

لتكن E مجموعة المصفوفات M_a من $M_2(\mathbb{R})$ و التي تكتب على الشكل $M_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$ و F مجموعة المصفوفات N_a من $M_2(\mathbb{R})$ بحيث $N_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ -a\sqrt{3} & -a \end{pmatrix}$ مع $a \in \mathbb{R}^*$

1) أ- بين أن $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*)\ M_a \times M_b = M_{ab}$

ب- ليكن φ التطبيق المعرف من $\mathbb{R}^*$ نحو E بحيث $\varphi(a) = M_a$

بين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$

ج- استنتج البنية الجبرية ل $(E,\times)$

2) أ- بين أن $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*)\ N_a \times N_b = M_{\frac{b}{a}}$

ب- نضع $G = E \cup F$. بين أن $(G,\times)$ زمرة .

هل هي تبادلية ؟

تمرين

نعتبر في الفضاء المتجهي الحقيقي $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ المجموعة E للمصفوفات $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ 3b & a-2b \end{pmatrix}$ حيث $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1) أ- بين أن $(E,+)$ زمرة تبادلية

ب- بين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء حقيقي و أعط بعده

2) أحسب $M(a,b) \times M(c,d)$

3) نعتبر التطبيق f المعرف من E نحو $\mathbb{C}$ كما يلي :

$$f : E \to \mathbb{C}$$
$$M(a,b) \to z = (a-b) + ib\sqrt{2}$$

أ- بين أن f تقابل و عرف تقابله العكسي

ب- بين أن f تشاكل من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$

ج- استنتج بنية $(E,+,\times)$

د- حدد مقلوب M من E عندما يكون ممكنا

2007

I] ليكن $E = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. لكل زوج (a,b) من E^2

نضع $a \perp b = a + b - ab\sqrt{2}$

1) أ- تحقق أن :

$$(\forall (a,b) \in E^2)\ a \perp b = \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(a\sqrt{2}-1\right)\left(b\sqrt{2}-1\right)$$

ب- استنتج أن $\perp$ قانون تركيب داخلي في E

2) بين أن $(E,\perp)$ زمرة تبادلية

II] $M_2(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 . نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي وأن $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

لتكن F مجموعة المصفوفات من $M_2(\mathbb{R})$ و التي تكتب على الشكل $M(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}-a & a \\ a & \sqrt{2}-a \end{pmatrix}$

حيث $a \in E$ و نضع $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

1) أ- تحقق أن $A^2 = 2A$ وأن $M(a) = I + \frac{a}{\sqrt{2}} A$

ب- بين أن F جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

2) نعتبر التطبيق :

$$\varphi : (E,\perp) \to (F,\times)$$
$$a \to \varphi(a) = M(a)$$

أ- بين أن φ تشاكل

تمرين

في الفضاء الحقيقي $(M_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ نعتبر المصفوفتين

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

و لتكن ξ مجموعة المصفوفات $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$

حيث $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1) بين أن $(\xi,+,\cdot)$ فضاء حقيقي و حدد بعده

2) تحقق أن $A^2 = A + 2I$ و استنتج أن A تقبل مقلوبا A^{-1}

و حدد A^{-1} بدلالة I , A

3) نضع $A^0 = I$ و $A^n = A \times A^{n-1}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

أ- بين أن A^n تكتب على الشكل :

$(\forall n \in \mathbb{N})\ A^n = u_n A + v_n I$ محددا $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$

ب- نضع $x_n = 2u_n + v_n$; $y_n = u_n - v_n$

أحسب x_{n+1} ; y_{n+1} على التوالي بدلالة x_n , y_n

واستنتج A^n بدلالة n

4) بين أن $(\xi,+,\times)$ حلقة تبادلية واحدية . هل هي كاملة ؟

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma