الثانية بكالوريا علوم رياضية	✈ البنيات الجبرية ✈	الأستاذ : الحيان

التمرين 1 :

$\boxed{I}$ لكل x و y من $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ ؛ نضع :

$$x * y = x + y - 2xy$$

1. بين أن * قانون تركيب داخلي في $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$.
2. بين أن القانون * تبادلي وتجميعي .
3. بين أن : $\left(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\},*\right)$ زمرة تبادلية .
4. بين أن $\forall x \in \mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}-\{0,1\}:$

$$\underbrace{x * x ... * x}_{n \text{ مرة}} = \frac{1}{2}\left[1-(1-2x)^n\right]$$

$\boxed{II}$ لكل x من $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ ؛ نضع :

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}$$

ونعتبر المجموعة : $E = \left\{A(x) \;/\; x \in \mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}\right\}$.

1. بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)$.
2. نعتبر التطبيق :

$$f \;:\; \mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\} \to E$$
$$x \mapsto A(x)$$

أ- بين أن f تشاكل تقابلي من $\left(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\},*\right)$ نحو $(E,\times)$.

ب- استنتج بنية $(E,\times)$.

جـ- ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ و $B = A\left(-\frac{1}{2}\right)$.

بين أن : $B^n = A\left(\frac{1-2^n}{2}\right)$ و $\left(B^n\right)^{-1} = A\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$

التمرين 2 :

لكل $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ ؛ نعتبر المصفوفة $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}$.

في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ؛ نعتبر E مجموعة المصفوفات التالية :

$$E = \left\{M(a,b) \,/\, a^2 - 2b^2 = 1\right\}$$

1. نضع : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$. تحقق من أن A تنتمي إلى E .
2. أ- بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ ؛ وأن القانون $\times$ تبادلي في E .

ب- بين أن جميع عناصر E تقبل مقلوبا في E بالنسبة لقانون التركيب الداخلي $\times$.

جـ - بين أن $(E,\times)$ زمرة تبادلية .

3. نضع : $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ؛ ولكل n من $\mathbb{N}$: $A^{n+1} = A^n \times A$.

نعتبر المجموعة : $G = \left\{A^n \;/\; n \in \mathbb{N}\right\}$.

أ- تحقق من أن : $G \subset E$.

ب- لتكن H مجموعة مماثلات مصفوفات G بالنسبة لعملية $\times$ في E . بين أن : $H = \left\{B^n \;/\; n \in \mathbb{N}\right\}$ حيث :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

جـ- بين أن $G \cup H$ زمرة جزئية من $(E,\times)$.

التمرين 3 :

لتكن E مجموعة المصفوفات التي تكتب على الشكل :

$$M_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

و F مجموعة المصفوفات التي تكتب على الشكل :

$$N_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ -a\sqrt{3} & -a \end{pmatrix},$$

حيث a عدد حقيقي غير منعدم .

1. أ- بين أن : $M_a \times M_b = M_{ab} \quad ; \quad \forall(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

ب- ليكن φ التطبيق المعرف من $\mathbb{R}^*$ نحو E بما يلي :

$$\varphi \;:\; \mathbb{R}^* \to E$$
$$a \mapsto \varphi(a) = M_a$$

بين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$.

استنتج البنية الجبرية لـ $(E,\times)$.

2. أ- بين أن : $N_a \times N_b = M_{\frac{b}{a}} \quad ; \quad \forall(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

ب- نضع : $G = E \cup F$. بين أن $(G,\times)$ زمرة .

جـ- هل $(G,\times)$ زمرة تبادلية ؟

التمرين 4 :

يرمزان على التوالي إلى الفضاء المتجهي $(\mathcal{M}_2,+,.)$ و $(\mathcal{M}_2,+,\times)$ الحقيقي و الحلقة للمصفوفات المربعة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الحقيقية. نضع : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

لتكن E المجموعة المعرفة كما يلي :

$$E = \left\{M \in \mathcal{M}_2 \;/\; \exists(a,b) \in \mathbb{R}^2 : M = aI + bA\right\}$$

1. أ- بين أن $(E,+)$ زمرة جزئية من $(\mathcal{M}_2,+)$.

ب- أثبت أن E جزء مستقر من $\mathcal{M}_2$ بالنسبة لضرب مصفوفة في

عدد حقيقي .

جـ- استنتج أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي .

د- بين أن (I,A) أساس للفضاء المتجهي E .

2. ليكن $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ؛ و a و b عددين حقيقيين حيث : $(a,b)\neq(0,0)$. بين أن :

$$(x,y)=(0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} ax-2by=0 \\ bx+(a-2b)y=0 \end{cases}$$

3. $(\mathbb{C}^*,\times)$ هي زمرة الأعداد العقدية غير المنعدمة ؛ نضع :

$$E^*=E-\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$$

أ- تحقق من أن : $A^2=-2(I+A)$.

ب- بين أن : $\forall(M,M')\in(E^*)^2 \quad : \quad M\times M'\in E^*$.

جـ- ليكن h التطبيق من $\mathbb{C}^*$ نحو E^* المعرف كما يلي :

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2 \quad : \quad h(a+ib)=(a+b)I+bA$$

α. بين أن h تقابل من $\mathbb{C}^*$ على E^* .

β. أثبت أن h تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ على $(E^*,\times)$.

γ. استنتج بنية $(E^*,\times)$.

التمرين 5 :

نضع : $I=]0,+\infty[$.

1. بين أن : $\forall(x,y)\in I^2 \quad : \quad e^{x+y}-e^x-e^y+2>1$.

2. نعرف على I قانون التركيب الداخلي $\perp$ بما يلي :

$\forall(x,y)\in I^2 \quad : \quad x\perp y=\ln\left(e^{x+y}-e^x-e^y+2\right)$.

أ- أثبت أن التطبيق : $\begin{array}{cccc} f & : & I & \rightarrow & I \\ & & x & \mapsto & \ln(x+1) \end{array}$ تقابل .

ب- برهن على أن f تشاكل من $(I,\times)$ على $(I,\perp)$.

جـ- استنتج بنية $(I,\perp)$.

التمرين 6 :

نعتبر المجموعة E المكونة من المصفوفات $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a+b \end{pmatrix}$ حيث a و b عددان حقيقيان و I و J المصفوفتان حيث :

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad J=\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

1. أ- بين أن : $(E,+)$ زمرة جزئية من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$.

ب- أثبت أنه : $\forall\alpha\in\mathbb{R}; \quad \forall M\in E : \quad \alpha.M\in E$.

جـ- استنتج أن : $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي .

د- بين أن (I,J) أساس للفضاء المتجهي E .

2. أ- تحقق من أن : $J^2=-I+J$.

ب- بين أن E مستقر في $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

جـ- أثبت أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية و واحدية .

التمرين 7 :

نزود المجموعة $\mathbb{R}^2$ بقانون التركيب الداخلي $*$ بحيث :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2; \quad \forall(x',y')\in\mathbb{R}^2 \quad :$$
$$(x,y)*(x',y')=(x+x'+xx',y+y')$$

ونعتبر المجموعة : $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad / \quad x\neq-1\}$.

1. أ- بين أن $(G,*)$ جزء مستقر من $(\mathbb{R}^2,*)$.

(لاحظ أن : $x+x'+xx'+1=(x+1)(x'+1)$)

ب- بين أن $(G,*)$ زمرة تبادلية .

2. نعتبر المجموعة : $B=\{(x,\ln(x+1)) \quad / \quad x\in]-1,+\infty[\}$.

بين أن $(B,*)$ زمرة جزئية ل $(G,*)$.

التمرين 8 :

نعتبر في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ المصفوفتين التاليتين :

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A=\begin{pmatrix}0&0&3\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

نذكر أن : $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,.)$ فضاء متجهي حقيقي .

و أن : $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية .

1. بين أن الأسرة (I,A,A^2) حرة في $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,.)$.

2. أ- أحسب A^2 و A^3 ثم A^n بدلالة n من $\mathbb{N}^*$.

(ناقش حسب بواقي قسمة n على 3) .

ب- تحقق من أن A تقبل مقلوبا A^{-1} ينبغي تحديده .

3. لتكن المجموعة :

$$E=\{M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})/\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : M=aI+bA+cA^2\}$$

أ- بين أن $(E,+)$ زمرة جزئية من $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$.

ب- تحقق من أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي .

جـ- حدد أساسا ل E .

4. أ- بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية .

ب- أحسب محدد المصفوفة : $-\sqrt[3]{3}A+A^2$.

جـ- هل $(E,+,\times)$ جسم ؟ علل جوابك .

التمرين 9 :

نعتبر $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات المربعة من الدرجة 3 مزودة بقانون جمع المصفوفات$(+)$ وقانون ضرب مصفوفة في عدد حقيقي$(.)$ وقانون ضرب المصفوفات$(\times)$.

لتكن I المصفوفة الوحدة . نعتبر المصفوفة $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ ؛

ونعتبر E مجموعة المصفوفات M المربعة من الدرجة 3 التي تحقق: $M\times A=A\times M$.

1. أ- بين أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي .

ب- بين أن الأسرة (I,A,A^2) أساس للفضاء المتجهي $(E,+,.)$.

2. بين أن $(E,+,\times)$ حلقة واحدية وتبادلية .

3. نعتبر المجموعة $F=\{M\in E \quad / \quad \det(M)\neq0\}$.

بين أن : $(F,\times)$ زمرة تبادلية .

4. نضع : $B = I + A + A^2$.
حدد مجموعة المصفوفات M التي تنتمي إلى E والتي تحقق : $M \times B = O$ حيث O هي المصفوفة المنعدمة من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

التمرين 10 :

$\boxed{I}$ لكل (a,b) من $\mathbb{R}^2$ ؛ نعتبر المصفوفة:

$$M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ؛ لتكن $\mathcal{E}$ مجموعة المصفوفات الآتية :

$$\mathcal{E} = \left\{ M_{(a,b)} \quad / \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

نذكر أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية .

1. بين أن $\mathcal{E}$ جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$ ومن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.
2. بين أن $(\mathcal{E},+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية .
3. أ- بين أنه لكل عددين حقيقيين x و y ؛ لدينا :
$$\left(x^2 + xy + y^2 = 0\right) \Leftrightarrow \left(x = y = 0\right)$$
ب- حدد العناصر التي تقبل مقلوبا في الحلقة $(\mathcal{E},+,\times)$.
د- استنتج أن $(\mathcal{E},+,\times)$ جسم تبادلي .

$\boxed{II}$ ليكن σ عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$.

1. بين أن $(1,\sigma)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C},+,.)$.
2. نعتبر التطبيق ψ من $\mathcal{E}$ نحو $\mathbb{C}$ المعرف بما يلي :
$$\psi \ : \ \mathcal{E} \to \mathbb{C}$$
$$M_{(a,b)} \mapsto a + \sigma b$$
بين أن ψ تشاكل تقابلي من $(\mathcal{E},+)$ نحو $(\mathbb{C},+)$.
3. نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - z + 1 = 0$.
حل في مجموعة الأعداد العقدية هذه المعادلة و أكتب حليها على الشكل المثلثي .
4. نفترض في هذا السؤال أن : $\sigma = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
بين أن ψ تشاكل من $(\mathcal{E},\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$.

التمرين 11 :

ليكن $\theta \in]0,\pi[$.

1. نعرف التطبيق f_θ من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}$ بما يلي :
$$f_\theta \ : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto x^2 + 2(\cos\theta)xy + y^2$$
بين أن : $(x,y) \neq (0,0) \Leftrightarrow f_\theta(x,y) > 0$.
2. نعتبر المجموعة :
$$E = \left\{ M(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x+y \end{pmatrix} \quad / \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
أ- بين أن E جزء مستقر بالنسبة للجمع والضرب في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
ب- بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية و واحدية . هل هي كاملة ؟
جـ- بين أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي .
د- بين أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي محددا أساسا له .

هـ- حل في E المعادلة : $-X^2 + 4X - 3I = O$.

التمرين 12 :

لتكن $(A,+,\times)$ حلقة واحدية .

نضع : $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \forall x \in A \quad :$

$x + x + \ldots + x = nx$ (n مرة)

$x \times x \times \ldots \times x = x^n$ (n من العوامل)

نفترض أن : $\forall x \in A \quad : \quad x^3 = x$.

1. بين أن : $\forall x \in A \quad : \quad 6x = 0$.
(يمكن نشر : $(x+1)^3$ و $(x-1)^3$)
2. استنتج أن :
أ- $\forall x \in A \quad ; \quad \exists(\alpha,\beta) \in 2A \times 3A \quad / \quad x = \alpha + \beta$.
ب- $2A \cap 3A = \{0\}$.

التمرين 13 :

لتكن $(A,+,\times)$ حلقة واحدية بحيث :

$(1) : \quad \forall x \in A \quad ; \quad x^6 = x$.

1. أ- بين أن : $\forall x \in A \quad : \quad x^6 = -x$.
ب- استنتج أن : $\forall x \in A \quad : \quad 2x = 0$.
2. أ- ليكن $x \in A$. أنشر $(x+1)^6$.
ب- استنتج أن : $\forall x \in A \quad ; \quad x^4 + x^2 = 0$.
جـ- استنتج أن : $\forall x \in A \quad ; \quad x^2 = x$.
3. ليكن $n \in \mathbb{N}$ حيث $n \geq 2$. حدد جميع الأعداد الطبيعية n بحيث $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$ يحقق العلاقة (1) .

التمرين 14 : Anneau de Bool

لتكن $(A,+,\times)$ حلقة بحيث : $\forall x \in A \quad ; \quad x^2 = x$.

1. بين أن : $\forall x \in A \quad : \quad 2x = 0$ ؛ ثم استنتج أن A حلقة تبادلية.
2. بين أن : $\forall (x,y) \in A^2 \quad : \quad x \times y \times (x+y) = 0$.
3. ماذا يمكن أن تستنتجه إذا كانت A كاملة .

التمرين 15 :

$\mathcal{P}$ يرمز إلى المستوى المنسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$. ليكن * قانون التركيب الداخلي في $\mathcal{P}$ المعرف كالتالي :
إذاكانت $M_1(x_1,y_1)$ و $M_2(x_2,y_2)$ نقطتين من $\mathcal{P}$ ؛ فإن $M_1 * M_2$ هي النقطة التي زوج إحداثيتيها (X,Y) بحيث :

$$\begin{cases} X = x_1 + x_2 + x_1x_2 \\ Y = y_1 + y_2 \end{cases}$$

1. ليكن (D) المستقيم الذي معادلته : $x = -1$.
بين أن : $M_1 * M_2 \in (D) \Leftrightarrow \left(M_1 \in (D) \text{ أو } M_2 \in (D)\right)$
2. ليكن $S = \mathcal{P} - (D)$ (فرق مجموعتين) . بين أن :
$(S,*)$ زمرة تبادلية .
3. ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الذي معادلته : $y = \ln(x+1)$.
أ- أرسم $(\mathcal{C})$.
ب- بين أن $(\mathcal{C},*)$ زمرة جزئية لـ $(S,*)$.

التمرين 16 :

لتكن $(G,*)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد e . نضع لكل a من G :

$$\begin{cases} a^1 = a \\ a^{n+1} = a^n \times a \quad ; \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \\ a^{-n} = (a^n)^{-1} \quad ; \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \\ a^0 = e \end{cases}$$

لكل $a \in G$ ولكل $n \in \mathbb{N}^*$ ؛ $(a^n)^{-1}$ هو مماثل العدد a^n .

1. ليكن a عنصرا من G . نفترض أنه يوجد عدد صحيح طبيعي n $(n \in \mathbb{N}^*)$ بحيث : $a^n = e$.

ونضع : $A = \{x \in G \quad / \quad \exists m \in \mathbb{Z} \quad : \quad x = a^m\}$.

بين أن : $(A,*)$ زمرة جزئية للزمرة $(G,*)$.

2. ليكن k من $\mathbb{N}-\{0,1\}$. نضع : $b = a^k$ و نعتبر :

$$B = \{x \in G \quad / \quad \exists m \in \mathbb{Z} \quad : \quad x = b^m\}$$

بين أن : $(B,*)$ زمرة جزئية للزمرة $(A,*)$.

3. أثبت أنه إذا كان $n \wedge k = 1$ ؛ فإن : $A = B$.

التمرين 17 :

لتكن $(G,.)$ زمرة عنصرها المحايد e . نرمز ب a^{-1} لمماثل a $(a \in G)$. نربط كل عنصر a من G بالتطبيق f_a من G نحو G المعرف بما يلي : $\forall x \in G \quad : \quad f_a(x) = a.x.a^{-1}$.

$$\begin{array}{rccc} f & : & G & \to & G \\ & & x & \mapsto & a.x.a^{-1} \end{array}$$

1. بين أن f_a تشاكل تقابلي من G نحو G .
2. لتكن $\mathfrak{F}$ مجموعة التطبيقات f_a عندما يتغير a في G . أي :

$\mathfrak{F} = \{f_a \quad / \quad a \in G\}$. بين أن : $(\mathfrak{F},\circ)$ زمرة .

التمرين 18 :

لتكن $(G,.)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد e . لكل x من G ؛ ولكل n من $\mathbb{N}$ ؛ نضع : $x^0 = e$ و $x^n = \underbrace{x.x....x}_{n \text{ مــرة}}$: $(n \in \mathbb{N}^*)$

نسمي **رتبة عنصر** x من G ؛ أصغر عدد صحيح طبيعي n غير منعدم بحيث : $x^n = e$. ونكتب : $o(x) = n$.

I. ليكن x عنصرا من G رتبته n ؛ وليكن m عددا صحيحا طبيعيا بحيث : $x^m = e$. بين أن : n / m .

II. ليكن a و b عنصرين من G بحيث : $ab = ba$ ؛ ولتكن p رتبة a , و q رتبة b , و s رتبة ab .

($p = o(a)$ و $q = o(b)$ و $s = o(ab)$) .

نفترض أن : $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$ و $p \wedge q = 1$.

1. أ- بين أن : $\forall k \in \mathbb{Z} \quad : \quad (ab)^k = a^k b^k$.

ب- بين أن : $(ab)^{pq} = e$.

جـ- بين أن : s / pq .

2. بين أن رتبة a^q هي p . ($o(a^q) = p$) .

3. أ- بين أن : $(a^q)^s = e$.

ب- استنتج أن s مضاعف للعدد p .

4. أ- بين أن : q يقسم s . أي (q / s) .

ب- استنتج أن : $s = pq$.

نتيجة : $\boxed{\begin{cases} o(a) = p \\ o(b) = q \Rightarrow o(ab) = o(a) \times o(b) \\ ab = ba \end{cases}}$

التمرين 19 :

نعتبر المصفوفتين : $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ و $K = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

نضع : $M_{(\alpha,\beta)} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha-\beta \\ \alpha-\beta & \alpha+\beta \end{pmatrix} \quad : \quad \forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

ولتكن $\mathfrak{M}$ مجموعة المصفوفات $M_{(\alpha,\beta)}$:

$$\mathfrak{M} = \{M_{(\alpha,\beta)} \quad / \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}$$

1. بين أن $(\mathfrak{M},+)$ زمرة تبادلية .
2. بين أن $\mathfrak{M}$ مستقرة بالنسبة لضرب المصفوفات في $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.
3. استنتج أن : $(\mathfrak{M},+,\times)$ حلقة واحدية .
4. هل الحلقة $(\mathfrak{M},+,\times)$ كاملة ؟
5. بين أن : $(M_{(\alpha,\beta)})^n = 2^{n-1}(\alpha^n.H + \beta^n K)$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$

التمرين 20 :

I. لتكن $(A,+,\times)$ حلقة واحدية ؛ وليكن a عنصرا من A بحيث :

$$\exists n \in \mathbb{N}-\{0,1\} \quad / \quad (a^{n-1} \neq 0_A \quad \text{و} \quad a^n = 0_A)$$

1. بين أن العنصر a لا يقبل مقلوبا في الحلقة A .
2. بين أن $(1_A - a)$ يقبل مقلوبا في الحلقة A .

II. لتكن D مجموعة الدوال القبلة للإشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$.

نضع : $\theta : x \mapsto 0$ و $u : x \mapsto 1$.

ليكن v عنصرا معلوما من المجموعة D . نضع :

$$\mathcal{E} = \{f \in D \quad / \quad f'v'' - f''v' = \theta\}$$

نفترض أن المجموعة $\mathcal{E}$ ؛ مزودة بعمليتي جمع الدوال وضرب دالة في عدد حقيقي ؛ فضاء متجهي حقيقي .

1. تحقق من أن : $u \in \mathcal{E}$ و $v \in \mathcal{E}$.
2. نفترض أن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad : \quad v'(x) \neq 0$.

أ- بين أن : $\{u,v\}$ أسرة حرة في الفضاء المتجهي $\mathcal{E}$.

ب- بين أن : $\{u,v\}$ أساس للفضاء المتجهي $\mathcal{E}$.

3. حدد الدالة v إذا علمت أن الدالة $x \mapsto e^{x+1}$ تنتمي إلى $\mathcal{E}$ و أن : $v(0) = e + 1$ و $v'(0) = e$.

التمرين 21 :

ليكن $(K,+,\times)$ جسما بحيث : $K \neq \{0\}$ ؛ وليكن e العنصر المحايد بالنسبة للقانون $\times$ في K . نفترض أن الجسم K يحقق الشرط (P) التالي : $(P) \quad : \quad \forall a \in K-\{0\} \quad : \quad a^{-1} = -a$.

1. بين أن : $\forall x \in K \quad : \quad x + x = 0$.
2. بدراسة $(x+e)^2$ ؛ بين أن الجسم K الذي يحقق الشرط (P)

هو : $K=\{0,e\}$.

التمرين 22 :

لتكن $\mathcal{M}$ مجموعة المصفوفات $M_{(a,b)}$ بحيث :

$M_{(a,b)}=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ و $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$.

1. بين أن $(\mathcal{M},+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية . هل هي كاملة ؟
2. بين أنه لكي تقبل المصفوفة $M_{(a,b)}$ مقلوبا في $\mathcal{M}$ ؛ فإنه يلزم ويكفي أن يكون : $\left|a^2-b^2\right|=1$.
3. استنتج مجموعة مصفوفات $\mathcal{M}$ التي تقبل مقلوبا في $\mathcal{M}$.
4. نضع : $\forall p\in\mathbb{N}^* \quad : \quad \mathcal{S}(p)=\{M_{(a,b)} \quad ; \quad p/(a+b)\}$.

التمرين 23 :

لتكن $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة الثانية .

نذكر أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية .

نضع : $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2 \quad : \quad M_{(a,b)}=\begin{pmatrix} a & -b \\ 3b & a-2b \end{pmatrix}$.

نعتبر المجموعة $\mathcal{L}$ بحيث : $\mathcal{L}=\{M_{(a,b)} \quad / \quad (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$.

1. بين أن $(\mathcal{L},+)$ زمرة تبادلية .
2. بين أن لكل a و b و c و d من $\mathbb{R}$ ؛ لدينا : $M_{(a,b)}\times M_{(c,d)}=M_{(ac-3bd\,,ad+bc-2bd)}$.
3. نعتبر التطبيق f التالي :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathcal{L}^* & \to & \mathbb{C} \\ & & M_{(a,b)} & \mapsto & (a-b)+ib\sqrt{2} \end{array} \text{ ؛}$$

حيث : $i^2=-1$ و $\mathcal{L}^*=\mathcal{L}-\{M_{(0,0)}\}$.

أ- بين أن f تطبيق تقابلي وحدد تقابله العكسي f^{-1} .

ب- نقبل أن $\mathcal{L}^*$ جزء مستقر من $(\mathcal{L},\times)$. بين أن f تشاكل من $(\mathcal{L}^*,\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*,\times)$.

4. أ- بين أن $(\mathcal{L},+,\times)$ جسم تبادلي .

ب- ليكن $M_{(a,b)}\in\mathcal{L}^*$. حدد مقلوب $M_{(a,b)}$.

5. حل في $\mathcal{L}^*$ المعادلة : $M_{(a,b)}\times M_{(a,b)}=M_{(-1,0)}$.

التمرين 24 :

لتكن $(G,\circ)$ زمرة عنصرها المحايد e ؛ وليكن s عنصرا ثابتا من G يخالف e . نرمز ب s^{-1} لمماثل s في $(G,\circ)$.

نعرف في G قانون التركيب الداخلي * بما يلي :

$\forall(a,b)\in G^2 \quad : \quad a*b=a\circ s\circ b$.

ونعتبر التطبيق φ من $(G,\circ)$ نحو $(G,*)$ المعرف بما يلي :

$\forall a\in G \quad : \quad \varphi(a)=a\circ s^{-1}$.

1. أ- بين أن φ تشاكل تقابلي من $(G,\circ)$ نحو $(G,*)$.

ب- استنتج بنية $(G,*)$.

2. أ- حدد ε العنصر المحايد في $(G,*)$.

ب- ليكن a عنصرا من G . حدد a' مماثل a في $(G,*)$.

3. نفترض أن الزمرة $(G,\circ)$ تبادلية ؛ ونعرف في G قانون التركيب الداخلي $\perp$ بما يلي :

$\forall(a,b)\in G\times G \quad : \quad a\perp b=e$.

بين أن $(G,\circ,\perp)$ حلقة تبادلية .

التمرين 25 :

نعتبر الحلقة الواحدية $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ ؛ والفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,.)$ حيث :

$\theta=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ هي المصفوفة المنعدمة .

$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ هي المصفوفة الواحدية .

نضع : $A=\begin{pmatrix} -1 & b & b \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ حيث b عدد حقيقي غير منعدم .

و : $B=A+I$.

1. أ- أحسب B^2 و B^3 .

ب- تحقق من أن : $(I-B)\times(I+B+B^2)=I$.

جـ- استنتج أن المصفوفة A تقبل مقلوبة A^{-1} ثم حدد A^{-1} .

2. ليكن $\mathcal{E}$ الفضاء المتجهي المولد بالأسرة (I,B,B^2) .

أ- بين أن (I,B,B^2) أسرة حرة في $\mathcal{E}$.

ب- استنتج أن (I,B,B^2) أساس في $\mathcal{E}$ ثم حدد بعد $\mathcal{E}$.

التمرين 26 :

المستوى $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$. لكل عدد حقيقي a موجب قطعا ؛ نعتبر التطبيق φ_a من $\mathcal{P}$ نحو $\mathcal{P}$ الذي يربط كل نقطة $M(x,y)$ بالنقطة بحيث : $\begin{cases} x'=ax \\ y'=ax\ln(a)+ay \end{cases}$.

نضع : $\Phi=\{\varphi_a \quad / \quad a>0\}$.

1. بين أن القانون $\circ$ (تركيب التطبيقات) هو قانون تركيب داخلي في المجموعة Φ .
2. بين أن $(\Phi,\circ)$ زمرة تبادلية .

التمرين 27 :

نعتبر المجموعة :

$E=\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \quad / \quad \forall x\in\mathbb{R}: f(x)=A(x)\cos x+B(x)\sin x\}$

حيث A و B حدوديتان درجتهما أصغر من أو تساوي 1 .

1. بين أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي .
2. نعتبر الأسرة $B=(f_1,f_2,f_3)$ حيث :

$f_1(x)=\cos x$ و $f_2(x)=\sin x$ و $f_3(x)=x\cos x$

بين أن B أساس للفضاء $(E,+,.)$.

3. ليكن $a\in\mathbb{R}$. نعتبر الدالتين g و h بحيث :

$$\begin{cases} g(x)=\cos(a+x) \\ h(x)=\sin(a+x) \end{cases} .$$

أ- تأكد من أن $(h,g)\in E^2$ ثم حدد إحداثيات g و h بالنسبة للأساس B .

ب- هل الأسرة $B'=(g,h,f_3,f_4)$ أساس لـ $(E,+,.)$ ؟

f_4 هي الدالة المعرفة بما يلي : $f_4(x)=x\sin x$.

التمرين 28 :

لتكن $\mathcal{M}$ مجموعة المصفوفات M من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ بحيث :

$$2M^2-3M+I_2=0_2$$

حيث : $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ و $I_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

1. لتكن M مصفوفة من $\mathcal{M}$.

نضع : $E=2(I_2-M)$ و $F=2M-I_2$

أ- بين أن : $E\times F=O_2$.

ب- بين أن : $E^2=E$ و $F^2=F$.

جـ- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad M^n=\frac{1}{2^n}E+F$.

2. نعتبر المتتاليتين العدديتين $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفتين بما يلي :

$$\begin{cases} x_0=y_0=1 \\ x_{n+1}=3x_n-10y_n \quad ; \quad n\in\mathbb{N} \\ y_{n+1}=\frac{1}{2}x_n-\frac{3}{2}y_n \quad ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases} .$$

أ- بين أن المصفوفة $A=\begin{pmatrix}3&-10\\ \frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ تنتمي إلى $\mathcal{M}$.

ب- نضع : $X_n=\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}$. بين أن: $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad X_{n+1}=A.X_n$

جـ- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad X_n=A^n.X_0$.

د- حدد تعبيري x_n و y_n بدلالة n .

هـ- أدرس تقارب المتتاليتين العدديتين $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

التمرين 29 :

I. نعتبر المجموعة : $E=\left\{\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix} \;/\; (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$.

1. بين أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي ثم حدد بعده .

2. بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية .

3. لتكن A مصفوفة من E ؛ وليكن n من $\mathbb{N}^*$. أحسب A^n بدلالة n

II. نعتبر المجموعة :

$F=\left\{\begin{pmatrix}a&b&c\\0&d&e\\0&0&f\end{pmatrix} \;/\; (a,b,c,d,e,f)\in\mathbb{R}^6\right\}$.

1. بين أن $(F,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي ثم حدد بعده .

2. بين أن $(F,+,\times)$ حلقة تبادلية و غير واحدية .

3. لتكن المصفوفتان: $M=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ و $N=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

أ- تحقق من أن M و N تنتميان إلى F .

ب- أحسب $M\times N$ و $N\times M$.

جـ- ماذا تستنتج بالنسبة للحلقة $(F,+,\times)$ ؟

4. نعتبر المصفوفات التالية :

$B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ و $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

أ- عبر عن B بدلالة I و J .

ب- أحسب : J^2 و J^3 و J^4 .

جـ- استنتج B^n بدلالة n ؛ حيث $n\in\mathbb{N}^*$.

التمرين 30 :

في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ؛ نعتبر المصفوفة : $A=\begin{pmatrix}2&-2&1\\2&-3&2\\-1&2&0\end{pmatrix}$.

1. تحقق من أن : $(A+3I)\times(A-I)=O$ حيث :

$O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ و $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

2. استنتج أن A قابلة للقلب في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ وحدد A^{-1} .

3. أحسب A^2 بدلالة A و I .

4. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad A^n=u_n.A+v_n.I$. $(A^0=I)$ ؛

حيث : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتان عدديتان معرفتان بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=0 \quad و \quad v_0=1 \\ u_{n+1}=-2u_n+v_n \quad ; \quad n\in\mathbb{N} \\ v_{n+1}=3u_n \quad ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

5. نضع : $w_n=u_n+v_n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أحسب w_{n+1} بدلالة w_n ؛ ثم استنتج w_n بدلالة n .

6. استنتج u_{n+1} بدلالة u_n .

7. حدد u_n بدلالة n ؛ ثم v_n بدلالة n .

8. أحسب A^n بدلالة n .

التمرين 31 :

نعتبر المجموعة: $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;/\; x-y+2z=0\}$

1. بين أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي

2. ليكن $e_1=(1,1,0)$ و $e_2=(0,2,1)$.

أ- بين أن الأسرة (e_1,e_2) مولدة للفضاء المتجهي $(E,+,.)$.

ب- بين أن الأسرة (e_1,e_2) حرة؛ ثم استنتج $\dim E$.