

(6) الفضاءات المتجهية الحقيقية :

قانون تركيب خارجي

لتكن A و E مجموعتين غير فارغتين

$$A \times E \rightarrow E$$

f قانون تركيب خارجي معرف على E ذو المعاملات في $A \Leftrightarrow f(\alpha, x) \mapsto f(\alpha, x)$

عادة ما نرمز ل $f(\alpha, x)$ ب αx أو $\alpha \cdot x$

الفضاء المتجهي

لتكن E مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي $*$ و بقانون تركيب خارجي $\cdot$ معاملاته في $\mathbb{R}$

نقول أن $(E, *, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي إذا وفقط إذا كان :

1. $(E, *)$ زمرة تبادلية
2. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E \quad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
3. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E \quad (\alpha \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$
4. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in E^2 \quad \alpha \cdot (x * y) = \alpha \cdot x * \alpha \cdot y$
5. $\forall x \in E \quad 1 \cdot x = x$

ترميز : سنرمز ل $*$ ب $+$ و لكل عنصر x من E بالرمز $\vec{x}$ و نسميه متجه

$(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي إذا وفقط إذا كان :

1. $(E, +)$ زمرة تبادلية
2. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall \vec{x} \in E \quad (\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x}$
3. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall \vec{x} \in E \quad (\alpha \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x})$
4. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2 \quad \alpha \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \cdot \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}$
5. $\forall \vec{x} \in E \quad 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$

قواعد الحساب في فضاء متجهي

ليكن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

$$\begin{aligned} 1. \quad \vec{a} + \vec{x} = \vec{b} &\Leftrightarrow \vec{x} = \vec{b} - \vec{a} \\ 2. \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall \vec{x} \in E) \quad \alpha \vec{x} = \vec{0} &\Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ أو } \vec{x} = \vec{0} \\ 3. \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall \vec{x} \in E) \quad (-\alpha) \cdot \vec{x} &= \alpha \cdot (-\vec{x}) = -(\alpha \cdot \vec{x}) \\ 4. \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2) \quad \alpha \cdot (\vec{x} - \vec{y}) &= \alpha \vec{x} - \alpha \vec{y} \\ 5. \quad (\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)(\forall \vec{x} \in E^2) \quad (\alpha - \beta) \cdot \vec{x} &= \alpha \vec{x} - \beta \vec{x} \end{aligned}$$

الفضاء المتجهي الجزئي

ليكن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و F جزء غير فارغ من E

نقول أن F فضاء متجهي جزئي من الفضاء E إذا وفقط إذا كان :

$$\begin{aligned} 1. \quad (\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in F^2) \quad \vec{x} + \vec{y} &\in F \quad F \text{ مستقر بالنسبة للقانون الداخلي } + \\ 2. \quad (\forall \vec{x} \in F)(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \quad \lambda \cdot \vec{x} &\in F \quad F \text{ مستقر بالنسبة للقانون الداخلي } \cdot \end{aligned}$$

الخاصية المميزة لفضاء متجهي جزئي

F فضاء متجهي جزئي من الفضاء E إذا وفقط إذا كان :

$$(\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in F^2)(\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2) \quad \alpha \vec{x} + \beta \vec{y} \in F$$

التأليفات الخطية

لتكن $\vec{x}_1$ و $\vec{x}_2$ و و $\vec{x}_n$ متجهات من الفضاء المتجهي E و α_1 و α_2 و و α_n أعداد حقيقية

المتجهة $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \vec{x}_i$ تسمى تأليفا خطية للمتجهات $\vec{x}_1$ و $\vec{x}_2$ و و $\vec{x}_n$ ذات المعاملات α_1 و α_2 و و α_n

أسرة مولدة

$$\forall \vec{x} \in E, \exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n / \quad \vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \vec{x}_i \Leftrightarrow B = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) \text{ أسرة مولدة للفضاء } E$$

أسرة حرة

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow B = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) \text{ أسرة حرة} \\ \forall (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n / \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \vec{x}_i = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \end{aligned}$$

أساس فضاء متجهي حقيقي

الأسرة $B = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ أساس للفضاء $E \Leftrightarrow \forall \vec{x} \in E, \exists! (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n / \vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$

الأسرة $B = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ أساس للفضاء $E \Leftrightarrow B$ أسرة حرة و مولدة للفضاء المتجهي E
عدد متجهات الأساس B يسمى بعد الفضاء المتجهي E ونرمز له بـ $\dim E$ ($\dim E = \text{card} B$)