

التمرين الأول

نعتبر المجموعة $E = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a+b \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ ونضع $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- (1) بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{R}), +)$
- (2) اكتب J^2 بدلالة I, J
- (3) بين أن E جزء مستقر في $(M_2(\mathbb{R}), \times)$
- (4) استنتج أن $(E, +, \times)$ حلقة . هل هي واحدة ؟ تبادلية ؟

التمرين الثاني

نعتبر المجموعة $E = \left\{ M = \begin{pmatrix} a+b & 3a \\ 0 & b-2a \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ ونزج I للمصفوفات الواحدة و θ

- (1) بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{R}), +)$ ونضع $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
- (2) أحسب A^2 واكتبها بدلالة I, A
- (3) بين أن $(E, +, \times)$ حلقة واحدة
- (4) هل $(E, +, \times)$ كاملة ؟
- (5) حدد المصفوفات M من E و التي تقبل مقلوب M^{-1} واكتب M^{-1} بدلالة I, A

التمرين الثالث

ليكن $(A, +, \times)$ حلقة و بحيث $x^2 = x \quad (\forall x \in A)$

- (1) بين أن $(\forall (x, y) \in A^2) \quad xy + yx = 0_A$
- (2) بين أن $\forall x \in A : x + x = 0_A$
- (3) بين أن $(A, +, \times)$ تبادلية
- (4) بين أن العلاقة $\leq$ المعرفة على A بما يلي : $x \leq y \Leftrightarrow yx = x$ علاقة ترتيب
- (5) بين أن $(\forall (x, y) \in A^2) \quad xy(x + y) = 0_A$
- (6) استنتج أن $A = \{0_A, 1\}$

التمرين الرابع

لتكن A من $M_2(\mathbb{R})$ و غير منعدمة و نعتبر المجموعة E للمصفوفات M من $M_2(\mathbb{R})$ بحيث : $MA = AM$

(1) بين أن $(E, +, \times)$ حلقة واحدة

(2) نأخذ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ونضع $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

أ- اكتب M بدلالة a, b

ب- نضع $M^0 = I$ و $M^n = M^{n-1} \times M$ لكل n من $\mathbb{N}^*$ بين أن $M^n = \begin{pmatrix} a^n & (a+b)^n - a^n \\ 0 & (a+b)^n \end{pmatrix} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ج- حدد عناصر E و التي تقبل مقلوب في E

التمرين الخامس

$$f_{(a,b)} : P \rightarrow P$$

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} : \begin{cases} x' = ax \\ y' = bx + \frac{1}{a}y \end{cases} \quad \text{ليكن } (a,b) \text{ من } \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \text{ نعتبر التطبيق :}$$

(1) نضع $E = \{f_{(a,b)} / (a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}\}$ بين أن $(E, \circ)$ زمرة .

(2) نعتبر المجموعتين $H = \{f_{(a,0)} / a \in \mathbb{R}^*\}$ و $K = \{f_{(1,b)} / b \in \mathbb{R}\}$

أ- بين أن H و K زمرة جزئية من $(E, \circ)$

ب- بين أن $(H, \circ)$ متشاكل مع $(\mathbb{R}^*, \times)$

ج- بين أن $(K, \circ)$ متشاكل مع $(\mathbb{R}, +)$

التمرين السادس

$$E = \left\{ M_a = \begin{pmatrix} 2^a & 0 \\ a2^a & 2^a \end{pmatrix} / a \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{نعتبر في حلق المصفوفات } (M_2(\mathbb{R}), +, \times)$$

و نعتبر التطبيق φ المعرفة بما يلي : $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow E$
 $x \rightarrow M_x$

(1) بين أن f تشاكل من $(\mathbb{Z}, +)$ إلى $(E, \times)$

(2) استنتج بنية $(E, \times)$

(3) أحسب $(M_a)^n$ لكل a, n من $\mathbb{Z}$

(4) نضع $F = \{M_a^n \times M_b^m / (n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$

أ- بين أن $(F, \times)$ زمرة جزئية من الزمرة $(E, \times)$

ث- ليكن c عدد من $\mathbb{Z}$ بين أن : $M_c \in F \Leftrightarrow a \wedge b | c$

ج- بين أن $E = F \Leftrightarrow a \wedge b = 1$

التمرين السابع

نعتبر أكلقت الواحدية $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ و الفضاء الحقيقي $(M_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ حيث أن θ المصفوفة المنعدمة

$$A = \begin{pmatrix} -1 & b & b \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{حيث } b \text{ عدد حقيقي غير منعدم و نضع } B = A + I$$

(1) أ- أحسب B^2 ; B^3

ب- تحقق أن $(I - B)(I + B + B^2) = I$

ج- استنتج أن A تقبل مقلوب A^{-1} ثم حدد A^{-1}

(2) ليكن E الفضاء الحقيقي المولد بالأسرة (I, B, B^2)

أ- بين أن (I, B, B^2) أسرة حرة

ب- استنتج أن (I, B, B^2) أساس للفضاء E و حدد بعده