

الثانية ع ر	قوانين التركيب الداخلي الزمرة - الحلقة - الجسم	ح. بوعيون
-------------	---	-----------

9- ليكن T مجموعة إزاحة المستوى. و H_0 مجموعة التحاكيات التي مركزها O . و R_0 مجموعة الدورانات التي لها نفس المركز O . التركيب "o" قانون تركيب داخلي في كل من T و H_0 و R_0 . لأن:

$$T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{u} + \vec{v}}$$

$$h_{(O,R)} \circ h'_{(O,R')} = h_{(O,RR')}$$

$$R_{(o,\alpha)} \circ R_{(o,\beta)} = R_{(o,\alpha+\beta)}$$

10- القانون * المعرف على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2) a * b = a^4 + a^3 - 3a^2b$$

قانون تركيب داخلي في $\mathbb{R}$.

11- نعتبر المجموعة $E = \{1, 2, 3, 6\}$

لنبين أن المضاعف المشترك الأصغر "v" قانون تركيب داخلي في E .

ولهذا نضع الجدول التالي الذي يسمى جدول القانون في E أو جدول (E, v) .

v	1	2	3	6
1	1	2	3	6
2	2	2	6	6
3	3	6	3	6
6	6	6	6	6

نلاحظ أن مركب أي عنصر من E هو عنصر من E . وبالتالي القانون "v" قانون تركيب داخلي في E .

3- جزء مستقر بالنسبة لقانون تركيب داخلي:

(a) تعريف:

لتكن E مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي $*$. وليكن S جزءا من $(S \subset E)$.

نقول إن S جزء مستقر من $(E, *)$ إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall (x,y) \in S^2) x * y \in S$$

(b) أمثلة:

1- $\mathbb{R}^+$ جزء مستقر من $(\mathbb{R}, \times)$

2- $\mathbb{R}_-$ ليس جزءا مستقرا من $(\mathbb{R}, \times)$

3- نعتبر المجموعة: $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$

$$(\forall (z,z') \in U^2) : |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'| = 1 \cdot 1 = 1$$

$$(\forall (z,z') \in U^2) : zz' \in U$$

إذن U جزء مستقر من $(\mathbb{C}, \times)$

ملاحظة:

إذا كان S جزءا مستقرا من $(E, *)$ فإن $*$ قانون تركيب داخلي في S .

(I) تعريف وأمثلة:

1- تعريف:

لتكن E مجموعة غير فارغة. نسمي قانون تركيب داخلي في E

$$f : E \times E \rightarrow E :$$

كل تطبيق f من E نحو E نحو E

$$(a,b) \rightarrow a * b$$

ترميز: العنصر $f(a,b)$ يسمى مركب العنصرين (a,b)

ونرمز له عادة ب $a * b$; aTb ; $a \perp b$;

إذا كان $*$ قانون تركيب داخلي في E فإننا نكتب $(E, *)$ ونقرأ المجموعة E مزودة بالقانون $*$.

ملاحظة: ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E :

$$(\forall (a,b,c,d) \in E^4) \begin{cases} a=b \\ c=d \end{cases} \Rightarrow a * c = b * d$$

لأن:

$$\begin{cases} a=b \\ c=d \end{cases} \Rightarrow (a,c) = (b,d) \Rightarrow f(a,c) = f(b,d) \\ \Rightarrow a * c = b * d$$

(* لدينا:

$$(\forall (a,b,c) \in E^3) \begin{cases} a=b \Rightarrow a * c = b * c \\ a=b \Rightarrow c * a = c * b \end{cases}$$

2- أمثلة:

1- الجمع والضرب قانونا تركيب داخلي في $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$

2- الضرب قانون تركيب داخلي في $\mathbb{R}^+$ لكنه ليس كذلك في $\mathbb{R}^-$. لأن إذا كان $(a,b) \in \mathbb{R}_-^2$ فإن: $(a \times b) \in \mathbb{R}^+$ أي $(a \times b) \notin \mathbb{R}_-$.

3- جمع متجهتين قانون تركيب داخلي في كل من V_3 و V_2 .

4- الجداء السلمي ليس قانون تركيب داخلي في V_3 و V_2 .

5- الجداء المتجهي قانون تركيب داخلي في V_3 .

6- لتكن E مجموعة غير فارغة و $P(E)$ مجموعة أجزاء E . الاتحاد والتقاطع والفرق التماثلي قوانين تركيب داخلية في $P(E)$.

7- ليكن X جزء من $\mathbb{R}$. ليكن $F(X, \mathbb{R})$ مجموعة الدوال المعرفة من X نحو $\mathbb{R}$. الجمع والضرب المعرفين على $F(X, \mathbb{R})$ كما يلي:

$$(\forall x \in X) (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

قوانين تركيب داخلية في $F(X, \mathbb{R})$.

8- لتكن $A(E, E)$ مجموعة التطبيقات من E نحو E . مجموعة غير فارغة.

التركيب $\circ$ المعرف على $A(E, E)$ ب:

$$(\forall x \in E) (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

قانون تركيب داخلي في $A(E, E)$.

(II) خاصيات قوانين التركيب الداخلي:

1- التجميعية والتبادلية:

(a) تعريف:

ليكن * قانون تركيب داخلي في E .

(1) نقول إن القانون * تجميعي في E إذا وفقط إذا كان

$$(\forall (a, b, c) \in E^3) \quad a * (b * c) = (a * b) * c$$

(2) نقول إن القانون * تبادلي في E إذا وفقط إذا كان

$$(\forall (a, b) \in E^2) \quad a * b = b * a$$

ملاحظة:

إذا كان القانون * تجميعي فإن:

$$a * (b * c) = a * b * c$$

(b) أمثلة:

القوانين (1), (3), (6), (7) و (9) التي رأيناها في أمثلة قوانين التركيب الداخلية كلها تجميعية وتبادلية (الفقرة I).

. لنبين على (7) و (9):

لنبين أن الجمع تجميعي في $F(X, \mathbb{R})$:

ليكن f, g, h من $F(X, \mathbb{R})$. لنبين أن:

$$f + (g + h) = (f + g) + h$$

$$(f + (g + h))(x) = ((f + g) + h)(x)$$

يعني:

$$(\forall x \in X) (f + (g + h))(x) = f(x) + (g + h)(x)$$

$$= f(x) + g(x) + h(x)$$

$$= (f(x) + g(x)) + h(x)$$

$$= (f + g)(x) + h(x)$$

$$= ((f + g) + h)(x)$$

(لأن الجمع تجميعي في $\mathbb{R}$).

إذن $f + (g + h) = (f + g) + h$ ومنه الجمع تجميعي في

$$F(X, \mathbb{R})$$

لنبين أن $\circ$ تجميعي في T :

نعتبر $t_{\bar{u}}$ و $t_{\bar{v}}$ و $t_{\bar{w}}$ من T لنبين أن:

$$t_{\bar{u}} \circ (t_{\bar{v}} \circ t_{\bar{w}}) = (t_{\bar{u}} \circ t_{\bar{v}}) \circ t_{\bar{w}}$$

لدينا:

$$t_{\bar{u}} \circ (t_{\bar{v}} \circ t_{\bar{w}}) = t_{\bar{u}} \circ t_{\bar{v} + \bar{w}}$$

$$= t_{\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})} = t_{(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}} = t_{\bar{u} + \bar{v}} \circ t_{\bar{w}}$$

$$= (t_{\bar{u}} \circ t_{\bar{v}}) \circ t_{\bar{w}}$$

(لأن الجمع تجميعي في V_3).

إذن:

$$(\forall (t_{\bar{u}}, t_{\bar{v}}, t_{\bar{w}}) \in T^3); t_{\bar{u}} \circ (t_{\bar{v}} \circ t_{\bar{w}}) = (t_{\bar{u}} \circ t_{\bar{v}}) \circ t_{\bar{w}}$$

إذن $\circ$ تجميعي في T .

ملاحظة:

. الجداد المتجهي ليس تجميعيا ولا تبادليا في V_3

. ليكن $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{h})$ معلم م.م مباشر.

← لدينا $\bar{i} \wedge \bar{j} = -\bar{j} \wedge \bar{i}$ إذن "∧" ليس تبادليا.

← لدينا $(\bar{i} \wedge \bar{j}) \wedge \bar{j} = \bar{h} \wedge \bar{j} = -\bar{i}$

$$\bar{i} \wedge (\bar{j} \wedge \bar{j}) = \bar{i} \wedge \bar{0} = \bar{0}$$

و

$$(\bar{i} \wedge \bar{j}) \wedge \bar{j} \neq \bar{i} \wedge (\bar{j} \wedge \bar{j})$$

إذن

ومنه "∧" (الجداد المتجهي) ليس تجميعيا في V_3 .

تمرين تطبيقي:

نعتبر القانون * المعرف على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$x * y = x + y + xy$$

ادرس تجميعية وتبادلية القانون *.

. التبادلية:

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad x * y = x + y + xy$$

لدينا:

$$= y + x + yx = y * x$$

إذن $x * y = y * x$ ومنه * تبادلي.

. التجميعية:

ليكن x, y, z من $\mathbb{R}$ لنتحقق هل:

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

لدينا:

$$(x * y) * z = (x + y + xy) * z$$

$$= x + y + xy + z + (x + y + xy)z$$

$$= x + y + xy + z + xz + yz + xyz \quad (1)$$

ولدينا:

$$x * (y * z) = x * (y + z + yz)$$

$$= x + y + z + yz + x(y + z + yz)$$

$$= x + y + z + yz + xy + xz + xyz \quad (2)$$

وبما أن (1) و (2) فإن * تجميعي:

$$(\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3) \quad (x * y) * z = x * (y * z)$$

(c) تجميعية مركب تطبيقي:

خاصية:

نعتبر التطبيقات من:

$$E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H$$

$$ho(gof) = (hog)of$$

لدينا:

هذا لا يعني أن o تجميعي.

← لنبين أن: $ho(gof) = (hog)of$

يعني:

$$(\forall x \in E) \quad (ho(gof))(x) = ((hog)of)(x)$$

← ليكن $x \in E$

$$h(z) = t \text{ و } f(x) = z \text{ و } g(y) = x$$

لدينا:

$$((hog)of)(x) = (hog)(f(x)) = (hog)(y)$$

$$= h(g(y)) = h(z) = t$$

ولدينا:

$$(ho(gof))(x) = h((gof)(x))$$

$$= h(g(f(x))) = h(g(y))$$

$$= h(z) = t$$

إذن:

$$(\forall x \in E) ((hog)of)(x) = (ho(gof))(x)$$

$$(hog)of = ho(gof) \quad \text{ومنه:}$$

حالة خاصة:

ليكن $A(E, E)$ مجموعة التطبيقات من E نحو E .
لدينا "o" قانون تجميعي غير تبادلي في $A(E, E)$.

2- العنصر المحايد:

(a) تعريف:

ليكن * قانون تركيب داخلي في E و $e \in E$.
نقول إن e عنصر محايد في E بالنسبة للقانون * أو عنصر محايد في $(E, *)$ إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall x \in E) e * x = x \text{ et } x * e = x$$

ملاحظة:

إذا كان القانون * تبادلي فإن e عنصر محايد إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall x \in E) x * e = x$$

(b) أمثلة:

- ← العدد 0 هو العنصر المحايد في كل من $(\mathbb{C}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{Z}, +), (\mathbb{N}, +)$
- ← العدد 1 هو العنصر المحايد في كل من $(\mathbb{C}, \times), (\mathbb{R}, \times), (\mathbb{Q}, \times), (\mathbb{Z}, \times), (\mathbb{N}, \times)$
- ← $\vec{0}$ هو العنصر المحايد في كل من: $(V_3, +), (V_2, +)$
- ← $\emptyset$ هو العنصر المحايد في $(P(E), \cup)$
- ← E هو العنصر المحايد في $(P(E), \cap)$
- ← $\emptyset$ هو العنصر المحايد في $(P(E), \Delta)$
- ← الدالة $\theta: x \rightarrow 0$ هو العنصر المحايد في $(F(X, \mathbb{R}), +)$
- ← الدالة $f: x \rightarrow 1$ هو العنصر المحايد في $(F(X, \mathbb{R}), \times)$
- ← التطبيق المطابق $Id_E: x \rightarrow x$ عنصر محايد في $(A(E, E), o)$
($foId_E = Id_E o f = f$)

ملاحظة:

نعتبر القانون * المعروف على $\mathbb{N}^*$ بما يلي:

$$(\forall (a, b) \in \mathbb{N}^{*2}) a * b = a^b$$

$$\text{لدينا: } (1) (\forall a \in \mathbb{N}^*) a * 1 = a^1 = a$$

$$\text{ولدينا: } 1 * a = 1^a = 1$$

إذن 1 ليس عنصر محايداً.

وبما أنه يحقق (1) نقول إن 1 محايد على اليمين.

تعريف:

← نقول إن e عنصر محايد على اليمين في $(E, *)$ إذا وفقط إذا كان

$$(\forall x \in E) x * e = x$$

← نقول إن e عنصر محايد على اليسار في $(E, *)$ إذا وفقط إذا كان

$$(\forall x \in E) e * x = x$$

← يكون e محايداً إذا وفقط إذا كان محايداً على اليمين وعلى اليسار.

(c) وحدانية العنصر المحايد:

خاصية:

ليكن * قانون تركيب داخلي في E . إذا كان للقانون * عنصراً محايداً فإنه وحيد.

برهان:

نفترض أن * يقبل عنصرين محايدين e' و e

لدينا e عنصر محايد و $e' \in E$ إذن: $e * e' = e'$

ولدينا $e' = e$ عنصر محايد و $e \in E$ إذن: $e * e' = e$

إذن $e' = e$

ومنه العنصر المحايد وحيد. (إذا كان موجوداً).

تمارين تطبيقية:

تمرين (1):

نعتبر * القانون المعروف على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) x * y = xy - 4x - 4y + 20$$

- هل للقانون * عنصر محايد؟

. لنبحث عن e من $\mathbb{R}$ بحيث: $(\forall x \in \mathbb{R}) e * x = x * e = x$

ونلاحظ أن * تبادلي. إذن يكفي أن نبحث عن e بحيث:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) e * x = x$$

لدينا:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) e * x = x \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) ex - 4e - 4x + 20 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) x(e - 5) - 4e + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e - 5 = 0 \\ 20 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = 5 \\ e = 5 \end{cases}$$

إذن $e = 5$ هو العنصر المحايد للقانون *.

تمرين (2):

نعتبر القانون * المعروف على $\mathbb{R}$ ب:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) x * y = x + 4y - 1$$

هل للقانون * عنصر محايد؟

. لنبحث عن e من $\mathbb{R}$ بحيث $(\forall x \in \mathbb{R}) x * e = e * x = x$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) x * e = x \text{ et } e * x = x$$

يعني:

- لدينا:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) e * x = x \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) e + 4x - 1 = x$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) e + 3x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 0 \\ e - 1 = 0 \end{cases}$$

وهذا مستحيل.

إذن * لا يقبل عنصراً محايداً في $\mathbb{R}$.

3- العنصر المماثل:

(a) تعريف:

ليكن * قانون تركيب داخلي في E . نفترض أن * يقبل عنصراً محايداً e .

نقول إن عنصراً x من E يقبل ممثلاً بالنسبة ل * إذا وفقط إذا وجد عنصر x' من E بحيث:

$$x * x' = x' * x = e$$

ملاحظة:

إذا كان القانون * تبادلي نكتفي بإحدى المتساويتين.

(b) أمثلة:

← في كل من $(\mathbb{C}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{Z}, +)$ كل عنصر x يقبل ممثلاً هو $-x$.

← في $(\mathbb{C}^*, \times); (\mathbb{R}^*, \times); (\mathbb{Q}^*, \times)$ كل عنصر x يقبل ممثلاً هو $\frac{1}{x}$.

$$\frac{1}{x}$$

$$x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1 \quad \text{لأن:}$$

← ليكن $B(E, E)$ مجموعة التبادلات من E نحو E .

فإن: $x' = \frac{4x-15}{x-4}$ ومنه x يقبل مماثلا هو $\frac{4x-15}{x-4}$

← إذا كان $x=4$

فإن $o=1$ ومنه 4 لا يقبل مماثلا

إذن مجموعة العناصر التي تقبل مماثلا هي: $\mathbb{R} - \{4\}$

والمماثل هو: $\frac{4x-15}{x-4}$

4- العنصر المنتظم:

(a) تعريف:

ليكن * قانون تركيب داخلي في E . نقول إن عنصرا a من E منتظم إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall (x, y) \in E^2) \begin{cases} a * x = a * y \Rightarrow x = y \\ x * a = y * a \Rightarrow x = y \end{cases}$$

ملاحظة:

إذا كان القانون * تبادلي فإن أحد الاستلزامين كاف.

(b) أمثلة:

← جميع عناصر كل من المجموعات $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ منتظمة

بالنسبة للجمع لأن: $a + x = a + y \Rightarrow x = y$

← في كل من $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ كل عنصر $a \neq 0$ منتظم بالنسبة

للضرب لأن: $ax = ay \Rightarrow x = y$

تمرين:

ليكن * قانون تركيب داخلي في E ، تجميعي.

e العنصر المحايد في $(E, *)$. ليكن $a \in E$.

– بين أنه إذا كان a يقبل مماثلا فإن a منتظم.

نفترض أن a يقبل مماثلا a'

لنبين أن a منتظم أي:

$$(\forall (x, y) \in E^2) \quad a * x = a * y \Rightarrow x = y$$

$$x * a = y * a \Rightarrow x = y$$

لدينا:

$$a * x = a * y \Rightarrow a' * (a * x) = a' * (a * y)$$

$$\Rightarrow (a' * a) * x = (a' * a) * y$$

$$\Rightarrow e * x = e * y$$

$$\Rightarrow x = y$$

وبنفس الطريقة نبين أن: $x * a = y * a \Rightarrow x = y$

إذن a منتظم.

(III) التشاكل:

1- تعريف وأمثلة:

(a) تعريف:

ليكن * قانون تركيب داخلي في E .

و T قانون تركيب داخلي في F .

نسمي تشاكل من $(E, *)$ نحو (F, T) كل تطبيق $f: E \rightarrow F$

يحقق ما يلي:

$$(\forall (x, y) \in E^2): f(x * y) = f(x) T f(y)$$

لدينا "o" قانون تركيب داخلي في $B(E, E)$ العنصره المحايد هو التطبيق الطابق Id_E .

كل عنصر f من $B(E, E)$ له مماثل هو تقابله العكسي f^{-1}

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id_E$$

(c) خاصيات:

خاصية (1):

ليكن * قانون تركيب داخلي في E .
نفترض أن القانون * يقبل عنصرا محايدا e وتجميعي. إذا كان لعنصر x مماثل x' فإن هذا المماثل وحيد.

برهان:

نفترض أن x يقبل مماثلين x' و x'' .

$$x * x' = x' * x = e$$

يعني:

$$x * x'' = x'' * x = e$$

– لدينا:

$$\begin{aligned} x' &= x' * e = x' * (x * x'') = (x' * x) * x'' \\ &= e * x'' = x'' \end{aligned}$$

إذن $x' = x''$

خاصية (2):

ليكن * قانون تركيب داخلي في E .
نفترض أن القانون * يقبل عنصرا محايدا e وتجميعي.
إذا كان لعنصرين x و y مماثلان x' و y' فإن: $x * y$ يقبل مماثلا هو $y' * x'$.

$$(x * y)' = y' * x'$$

يعني:

برهان:

لدينا:

$$(x * y) * (y' * x')$$

$$= x * (y * y') * x' = x * e * x'$$

$$= (x * e) * x' = x * x' = e$$

$$(y' * x') * (x * y) = e$$

وبنفس الطريقة نجد:

استنتاج:

ليكن g, f من $B(E, E)$.

مماثل f هو f^{-1} ومماثل g هو g^{-1} .

مماثل $f \circ g$ هو $g^{-1} \circ f^{-1}$.

ونعلم أن مماثل $f \circ g$ هو $(f \circ g)^{-1}$

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

تمرين:

نعتبر القانون * المعروف على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$x * y = xy - 4x - 4y + 20$$

من خلال ما سبق 5 هو العنصر المحايد.

– حدد العناصر التي تقبل مماثلا.

ليكن $x \in \mathbb{R}$

لنتحقق هل x يقبل مماثلا.

لنبحث عن x' بحيث $x * x' = 5$ (القانون تبادلي).

$$x * x' = 5 \Leftrightarrow xx' - 4x - 4x' + 20 = 5$$

$$\Leftrightarrow x'(x - 4) = 4x - 15$$

← إذا كان $x \neq 4$

(b) أمثلة:

1- نعتبر التطبيق: $f: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$

$$x \rightarrow ax$$

لنبين أن f تشاكل.

يعني: $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) f(x+y) = f(x) + f(y)$

$$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay$$

$$= f(x) + f(y)$$

لدينا:

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) f(x+y) = f(x) + f(y)$$

إذن f تشاكل من $(\mathbb{R}, +)$ نحو $(\mathbb{R}, +)$.

2- نعتبر $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$

$$r \rightarrow a^r \quad (a \in \mathbb{R}_+^*)$$

بين أن f تشاكل من $(\mathbb{Q}, +)$ نحو $(\mathbb{R}, \times)$

- ليكن r و r' من $\mathbb{Q}$.

$$f(r+r') = f(r) \times f(r')$$

لدينا:

$$f(r+r') = a^{r+r'} = a^r \times a^{r'} = f(r) \times f(r')$$

$$(\forall (r, r') \in \mathbb{Q}^2) f(r+r') = f(r) \cdot f(r')$$

ومنه f تشاكل من $(\mathbb{Q}, +)$ نحو $(\mathbb{R}, \times)$.

تمارين تطبيقية:

تمرين 1:

نعرف في $\mathbb{R}^2$ جمع زوجين و جداء زوجين بما يلي:

$$(x, y) + (x', y') = (x+x', y+y')$$

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$$

ونعتبر التطبيق $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$z = a + ib \rightarrow (a, b)$$

بين أن f تشاكل من $(\mathbb{C}, +)$ نحو $(\mathbb{R}^2, +)$

بين أن f تشاكل من $(\mathbb{C}, \times)$ نحو $(\mathbb{R}^2, \times)$

← لنبين أن f تشاكل من $(\mathbb{C}, +)$ نحو $(\mathbb{R}^2, +)$.

$$z' = a' + ib' \text{ et } z = a + ib$$

$$f(z+z') = f(z) + f(z')$$

لدينا:

$$z + z' = (a + ib) + (a' + ib')$$

$$= (a+a') + i(b+b')$$

$$f(z+z') = (a+a', b+b')$$

لدينا:

$$= (a, b) + (a', b') = f(z) + f(z')$$

إذن f تشاكل من $(\mathbb{C}, +)$ نحو $(\mathbb{R}^2, +)$.

← لنبين أن f تشاكل من $(\mathbb{C}, \times)$ نحو $(\mathbb{R}^2, \times)$.

$$f(z \cdot z') = f(z) \cdot f(z') \quad \text{ليكن } z = a + ib \text{ و } z' = a' + ib'$$

$$z' = a' + ib'$$

لدينا:

$$z \cdot z' = (a + ib) \cdot (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

لدينا:

$$f(z \cdot z') = (aa' - bb', ab' + a'b)$$

ولدينا:

$$f(z) \cdot f(z') = (a, b) \cdot (a', b')$$

$$= (aa' - bb', ab' + a'b)$$

$$f(z \cdot z') = f(z) \cdot f(z')$$

ومنه f تشاكل من $(\mathbb{C}, \times)$ نحو $(\mathbb{R}^2, \times)$

تمرين 2:

$$A = \{f_{(a,b)} : x \rightarrow ax + b \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$

ونعرف على $\mathbb{R}^2$ القانون T بمايلي

$$(a,b)T(a',b') = (aa', ab' + b)$$

$$\varphi : (A, \circ) \rightarrow (\mathbb{R}^2, T)$$

$$f_{(a,b)} \rightarrow (a,b)$$

بين أن φ تشاكل

يكون φ تشاكل من $(A, \circ)$ نحو $(\mathbb{R}^2, T)$ إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall (f_{(a,b)}, f_{(a',b')}) \in A^2):$$

$$\varphi(f_{(a,b)} \circ f_{(a',b')}) = \varphi(f_{(a,b)}) T \varphi(f_{(a',b')})$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (f_{(a,b)} \circ f_{(a',b')})(x) = f_{(a,b)}(f_{(a',b')}(x))$$

$$= f_{(a,b)}(a'x + b')$$

$$= a(a'x + b') + b$$

$$= aa'x + ab' + b$$

إذن:

$$\varphi(f_{(a,b)} \circ f_{(a',b')}) = (aa', ab' + b)$$

$$= (a,b)T(a',b')$$

$$= \varphi(f_{(a,b)}) T \varphi(f_{(a',b')})$$

ومنه: φ تشاكل

2- خاصيات:

خاصية 1

ليكن f تشاكل من $(E, *)$ نحو (F, T)

لدينا $f(E)$ جزء مستقر من (F, T) .

برهان:

$$(E, *) \rightarrow (F, T) : f \text{ تشاكل.}$$

لنبين أن $f(E)$ مستقر من (F, T)

$$(*) \text{ لدينا } f(E) \subset F$$

(*) ليكن $x' \text{ و } y' \text{ من } f(E)$. لنبين أن: $x'Ty' \in f(E)$

لدينا $x' \text{ و } y' \text{ من } f(E)$. إذن يوجد $x \text{ و } y \text{ من } E$ بحيث:

$$x' = f(x) \text{ و } y' = f(y)$$

إذن:

$$x'Ty' = f(x)Tf(y) = f(x*y)$$

ولدينا $x*y \in E$

$$x'Ty' \in f(E) \text{ يعني: } f(x*y) \in f(E)$$

إذن $f(E)$ مستقر من (F, T) .

ملاحظة:

إذا كان f تشاكل من $(E, *)$ نحو (F, T) فإن T قانون تركيب

داخلي في $f(E)$.

IV) الزمرة: Groupe

1- تعريف:

لتكن G مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي $*$ نقول إن $(G, *)$ زمرة إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

- ← " " تجميعي في G
- ← " " يقبل عنصرا محايدا.
- ← كل عنصر من G يقبل مائلا.

ملاحظات:

ليكن $(G, *)$ زمرة.

- ← إذا كان " " تبادلي، نقول إن $(G, *)$ زمرة تبادلية أو أبيلية (Abelien).
- ← إذا كانت G منتهية. نقول إن $(G, *)$ زمرة منتهية.
- ← يمكن أن نرمز للقانون " " بالجمع " + " (دون أن يكون هو الجمع المعتاد) وفي هذه الحالة نرمز للعنصر المحايد ب " 0 ". ونرمز للمائلا x^{-1} .
- ← يمكن أن نرمز للقانون " " بالضرب " . " (دون أن يكون هو الضرب الاعتيادي). وفي هذه الحالة نرمز للعنصر المحايد ب 1. ولمائلا x^{-1} .

2 - أمثلة:

- ← كل من $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$ زمرة تبادلية.
- ← كل من $(\mathbb{C}^*, \times)$, $(\mathbb{R}^*, \times)$, $(\mathbb{Q}^*, \times)$ زمرة تبادلية.
- ← كل من $(V_3, +)$ و $(V_2, +)$ زمرة تبادلية.
- ← $(F(X, \mathbb{R}), +)$ زمرة تبادلية.
- ← $(B(E, E), o)$ (مجموعة التقابلات)، زمرة غير تبادلية.
- ← كل من (R_o, o) , (H_o, o) , (T, o) زمرة تبادلية.
- ← $(P(E), \cup)$ و $(P(E), \cap)$ ليسا زميرتين.
- ← $(P(E), \Delta)$ زمرة تبادلية.

3- خاصيات

خاصية (1):

لتكن $(G, *)$ زمرة. لدينا ما يلي:

- ← " " تجميعي.
- ← " " يقبل عنصرا محايدا.
- ← كل عنصر x من G يقبل مائلا x' في G .
- ← كل عنصر a من G منتظم (لأنه يقبل مائلا).
- ← $(\forall (a, x, y) \in G^3) \quad a * x = a * y \Leftrightarrow x = y$
- ← $x * a = y * a \Leftrightarrow x = y$

نلخص هذه الخاصية بقولنا: يمكن الاختزال في زمرة وبدون شروط.

خاصية (2):

لتكن $(G, *)$ زمرة. وليكن a, b من G .

كل من المعادلتين: $a * x = b$ (1) و $x * a = b$ (2) تقبل حلا وحيدا في G .

برهان:

خاصية (2):

ليكن $f: (E, *) \rightarrow (F, T)$ تشاكلا.

- (*) إذا كان $*$ تجميعي في E فإن T تجميعي في $f(E)$.
- (*) إذا كان $*$ تبادلي في E فإن T تبادلي في $f(E)$.
- (*) إذا كان $*$ عنصر محايد e في E فإن T يقبل مائلا في $(f(E), T)$ هو $f(x')$ يعني: $f(x') = (f(x))'$.

برهان:

ليكن $f: (E, *) \rightarrow (F, T)$ تشاكل.

- ← نفترض أن $*$ تجميعي في E . لنبين أن T تجميعي في $f(E)$.
- ليكن $x', y', z' \in f(E)$ من $f(E)$. لنبين أن $x'T(y'Tz') = (x'Ty')Tz'$.
- لدينا $x', y', z' \in f(E)$ إذن يوجد x, y, z من E بحيث:

$$x' = f(x); y' = f(y); z' = f(z)$$

إذن:

$$\begin{aligned} (x'Ty')Tz' &= (f(x)Tf(y))Tf(z) \\ &= f(x * y)Tf(z) \\ &= f[(x * y) * z] \\ &= f[x * (y * z)] = f(x)Tf(y * z) \\ &= f(x)T(f(y)Tf(z)) \\ (x'Ty')Tz' &= x'T(y'Tz') \end{aligned}$$

إذن:

ومنه T تجميعي في (E)

- + بنفس الطريقة نبين أن T تبادلي في $f(E)$.
- + نفترض أن e عنصر محايد في $(E, *)$. لنبين أن $f(e)$ عنصر محايد في $f(E)$.
- ليكن $x' \in f(E)$ من $f(E)$. لنبين أن: $x'Tf(e) = f(e)Tx' = x'$.
- لدينا $x' \in f(E)$ إذن يوجد x من E بحيث $x' = f(x)$.
- بنفس الطريقة نجد: $f(e)Tx' = x'$.
- إذن $f(e)$ هو العنصر المحايد في $f(E)$.
- ← نفترض أن x' هو مائلا x في $(E, *)$. لنبين أن $f(x')$ هو مائلا $f(x)$ في $(f(E), T)$.
- يعني: $f(x)Tf(x') = f(x')Tf(x) = f(e)$.
- لدينا:

$$f(x)Tf(x') = f(x * x') = f(e)$$

$$f(x')Tf(x) = f(x' * x) = f(e)$$

إذن $f(x')$ هو مائلا $f(x)$ في $(f(E), T)$.

ملاحظة:

1) إذا كان $f: (E, *) \rightarrow (F, T)$ تشاكلا فإن f ينقل خاصيات $*$ في E إلى T في $f(E)$.

وإذا كان f شمولي فإن $f(E) = F$ وبالتالي f ينقل خاصيات $*$ في E إلى T في F .

2) نقول إن مجموعتين F و E متشاكلتان إذا وفقط إذا وجد تشاكل من E نحو F .

- ونقول إن F و E متشاكلتان تقابليا إذا وفقط إذا وجد تشاكل تقابلي من E نحو F .

برهان:

(*) لدينا $H \neq \emptyset$ لأنها تضم العنصر المحايد.
 (*) لنبين أن e هو العنصر المحايد في H :
 ليكن e' العنصر المحايد في H .
 لنبين أن $e = e'$:
 ليكن $x \in H$

لدينا $e' = x * e' = x$ إذن: $x * e' = x$ (1)

ولدينا $H \subset G$ إذن $x \in G$. ولدينا e هو العنصر المحايد في G إذن
 $(2) x * e = x$.

من (1) و (2) نجد: $x * e' = x * e$
 إذن: $e' = e$

إذن e هو العنصر المحايد في H .
 (*) ليكن $x \in H$ و x' مماثل x في G .
 لنبين أن x' ينتمي لـ H .
 ليكن x'' مماثل x في H .

لدينا: $\begin{cases} x * x' = e \\ x * x'' = e' = e \end{cases}$ إذن $x * x' = x * x''$
 إذن $x' = x''$

ومنه $x' \in H$

(*) ليكن x و y من H . و y' مماثل y في G .
 لنبين أن $x * y' \in H$.
 لدينا $y \in H$. ومن خلال ما سبق $y' \in H$.

إذن: $\begin{cases} x \in H \\ y' \in H \end{cases}$ إذن $x * y' \in H$ لأن H جزء مستقر من G .

خاصية (2):

ليكن $(G, *)$ زمرة. و H جزء من G .
 تكون H زمرة جزئية لـ $(G, *)$ إذا وفقط إذا كان:
 (*) $H \neq \emptyset$
 (*) $(\forall (x, y) \in H^2) x * y' \in H$
 حيث y' مماثل y في G .

برهان:

(*) نفترض أن H زمرة جزئية لـ $(G, *)$.
 من خلال الخاصية السابقة لدينا:
 $H \neq \emptyset$

و $(\forall (x, y) \in H^2) x * y' \in H$ مع y' مماثل y في G .
 (*) نفترض أن

(II) $(\forall (x, y) \in H^2) x * y' \in H$ و $H \neq \emptyset$

لنبين أن H زمرة جزئية لـ $(G, *)$.

1- لدينا $H \neq \emptyset$ إذن يوجد $a \in H$:
 لدينا $(a, a) \in H^2$

إذن من خلال (II): $a * a' \in H$
 يعني: $e \in H$

2- ليكن $x \in H$

لدينا $(e, x) \in H^2$ إذن: $e * x' \in H$
 يعني: $x' \in H$
 إذن $(\forall x \in H): x' \in H$

$$(1) \Leftrightarrow a * x = b$$

$$\Leftrightarrow a' * a * x = a' * b$$

$$\Leftrightarrow e * x = a' * b$$

$$\Leftrightarrow x = a' * b$$

إذن (1) تقبل حلا وحيدا في G هو $a' * b$
 - بنفس الطريقة نجد أن (2) تقبل حلا وحيدا في $G: b * a'$

استنتاج:

ليكن $(G, *)$ زمرة. وليكن $a \in G$.

نعتبر التطبيق $f: G \rightarrow G$ $g: G \rightarrow G$
 $x \rightarrow x * a$ $x \rightarrow a * x$

التطبيقان f و g تقابلان.

4- زمرة جزئية: Sous - groupe

(a) تعريف:

لتكن $(G, *)$ زمرة. و H جزء مستقر من $(G, *)$.
 نقول إن $(H, *)$ زمرة جزئية لـ $(G, *)$ أو H زمرة جزئية لـ G :
 إذا وفقط إذا كان $(H, *)$ زمرة.

(b) أمثلة:

← $(\mathbb{Q}, +)$ زمرة جزئية لـ $(\mathbb{R}, +)$.

← $(\mathbb{R}^*, \times)$ زمرة جزئية لـ $(\mathbb{C}^*, \times)$.

← لتكن $B(P, P)$ مجموعة تقابلات المستوى.

كل من $(R_0, o), (H_0, o), (T, o)$ زمرة جزئية لـ
 $(B(P, P), o)$

← ليكن $(G, *)$ زمرة عنصرها المحايد e .

لدينا $(\{e\}, *)$ زمرة جزئية لـ $(G, *)$.

و $(G, *)$ زمرة جزئية لـ $(G, *)$.

وكل زمرة جزئية H تخالف هتين الزمرتين تسمى زمرة جزئية فعلية (non trivial)

ملاحظة:

يمكن لزمرة G أن تكون غير تبادلية لكن الزمرة الجزئية تبادلية.

- مثال: $(B(P, P), o)$ غير تبادلية.

لكن (T, o) تبادلية.

(c) خاصيات:

خاصية (1):

لتكن $(G, *)$ زمرة عنصرها المحايد e ولتكن H زمرة جزئية لـ
 $(G, *)$.

لدينا ما يلي:

← $H \neq \emptyset$

← e هو العنصر المحايد في H .

← إذا كان $x \in H$ و x' مماثل x في G , فإن $x' \in H$.

← $(\forall (x, y) \in H^2): x * y' \in H$

حيث y' مماثل y في G .

$$= |z_1| \times \frac{1}{|z_2|} = 1$$

$$|z_1| = 1 \text{ لأن}$$

$$|z_2| = 1 \text{ و}$$

$$z_1 \times z_2^{-1} \in U \text{ إذن}$$

وبالتالي فإن U زمرة جزئية ل $(\mathbb{C}^*, \times)$.

ومنه فإن $(U, \times)$ زمرة تبادلية.

تمرين (2):

ليكن $n \in \mathbb{N}$. نعتبر المجموعة:

$$n\mathbb{Z} = \{nk / k \in \mathbb{Z}\}$$

بين أن $(n\mathbb{Z}, +)$ زمرة تبادلية.

(*) لنبين أن: $(n\mathbb{Z}, +)$ زمرة تبادلية.

لدينا $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$. ونعلم أن $(\mathbb{Z}, +)$ زمرة تبادلية.

إذن يكفي أن نبين أن $(n\mathbb{Z}, +)$ زمرة جزئية ل $(\mathbb{Z}, +)$:

← لدينا $n\mathbb{Z} \neq \emptyset$ (لأن $0 \in n\mathbb{Z}$).

← ليكن $x, y \in n\mathbb{Z}$. لنبين أن: $x - y \in n\mathbb{Z}$.

لدينا $x, y \in n\mathbb{Z}$ إذن يوجد k_1 و k_2 بحيث:

$$x = nk_1 \text{ و } y = nk_2$$

إذن:

$$x - y = nk_1 - nk_2 = n(k_1 - k_2)$$

$$= nk_3$$

$$\text{مع } k_3 = k_1 - k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\text{إذن: } x - y \in n\mathbb{Z}$$

ومنه $(\forall (x, y) \in n\mathbb{Z}^2): x - y \in n\mathbb{Z}$

وبالتالي $(n\mathbb{Z}, +)$ زمرة جزئية ل $(\mathbb{Z}, +)$.

إذن $(n\mathbb{Z}, +)$ زمرة تبادلية.

تمرين (3):

لتكن $(G, .)$ زمرة عنصرها المحايد e .

ليكن $a \in G$.

نضع: $C_a = \{x \in G / a.x = x.a\}$ (centralisateur de a)

$$Z(G) = \{x \in G / (\forall y \in G): x.y = y.x\}$$

(centre de G)

بين أن C_a و $Z(G)$ زمرتان جزئيتان ل $(G, .)$.

(*) لنبين أن: C_a زمرة جزئية ل $(G, .)$:

← لدينا: $a.e = e.a = a$

إذن: $e.a = a.e$ إذن $e \in C_a$

ومنه: $C_a \neq \emptyset$.

← ليكن $x, y \in C_a$. لنبين أن: $x.y^{-1} \in C_a$.

يعني: $a.(x.y^{-1}) = (x.y^{-1}).a$

لدينا $x, y \in C_a$ إذن:

حيث x' هو مماثل x في G .

3- ليكن $x, y \in H$

من خلال ما سبق نستنتج أن $y' \in H$.

إذن $(x, y') \in H^2$ ومن (III) نجد: $x*(y')' \in H$

يعني: $x*y \in H$

إذن H جزء مستقر.

ومنه القانون * قانون تركيب داخلي في H .

4- لنبين أن $(H, *)$ زمرة:

- تجميعي في G إذن * تجميعي في H

- $e \in H$ و $(\forall x \in H): e*x = x*e = x$

إذن e العنصر المحايد في H .

- ليكن $x \in H$

لدينا $x \in G$ إذن x يقبل مماثل x' في G . يعني:

$$x*x' = x'*x = e$$

إذن x' هو مماثل x في H . وبالتالي $(H, *)$ زمرة جزئية.

ملاحظة:

1- (*) إذا رمزنا للقانون " * " ب " + " فإن الخاصية المميزة تصبح:

$$H \neq \emptyset$$

$$(\forall (x, y) \in H^2) x - y \in H$$

(*) إذا رمزنا للقانون " * " ب " $\times$ " فإن الخاصية المميزة تصبح:

$$H \neq \emptyset$$

$$(\forall (x, y) \in H^2) x.y^{-1} \in H$$

2- لتكن $(G, *)$ زمرة و $H \subset G$

تكون $(H, *)$ زمرة جزئية ل $(G, *)$ إذا وفقط إذا كان:

$$H \neq \emptyset$$

$$(\forall (x, y) \in H^2) x + y \in H$$

$$(\forall x \in H): x' \in H \text{ (} x' \text{ مماثل } x \text{ في } G \text{)}$$

تمارين تطبيقية:

تمرين (1):

نعتبر المجموعة: $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$

بين أن $(U, \times)$ زمرة تبادلية.

(*) لنبين أن $(U, \times)$ زمرة تبادلية:

نعلم أن $(\mathbb{C}^*, \times)$ زمرة تبادلية.

إذن يكفي أن نبين أن $(U, \times)$ زمرة جزئية ل $(\mathbb{C}^*, \times)$.

← لدينا:

$$(\forall z \in U): |z| = 1$$

إذن: $z \neq 0$

إذن: $z \in \mathbb{C}^*$

إذن: $U \in \mathbb{C}^*$

← لدينا $U \neq \emptyset$ (لأن $1 \in U$).

← ليكن $z_1, z_2 \in U$. لنبين أن: $z_1 \times z_2^{-1} \in U$

$$\text{لدينا: } |z_1 \times z_2^{-1}| = |z_1| \times \frac{1}{|z_2|}$$

تمارين:

لتكن $(G, .)$ زمرة.

نعتبر التطبيق: $f_a: G \rightarrow G$

$$x \rightarrow a.x.a^{-1}$$

(1) بين أن f_a تشاكل تقابلي من $(G, .)$ إلى $(G, .)$

(2) نعتبر المجموعة:

$$F = \{f_a / a \in G\}$$

(a) بين أن "o" قانون تركيب داخلي في F .

(b) نعتبر التطبيق

$$a \rightarrow f_a$$

← بين أن h تشاكل شمولي من $(G, .)$ نحو (F, o)

← استنتج أن (F, o) زمرة.

(1) * لنبين أن f_a تشاكل من $(G, .)$ نحو $(G, .)$

ليكن x, y من G .

$$f_a(xy) = f_a(x) \cdot f_a(y)$$

$$f_a(xy) = a.x.y.a^{-1}$$

$$= a.x.e.y.a^{-1}$$

$$= a.x.a^{-1}.a.y.a^{-1}$$

$$= (a.x.a^{-1}) \cdot (a.y.a^{-1})$$

$$= f_a(x) \cdot f_a(y)$$

إذن f_a تشاكل.

(*) لنبين أن f_a تقابل:

ليكن $y \in G$. لنبحث عن x من G بحيث: $f_a(x) = y$

$$f_a(x) = y \Leftrightarrow a.x.a^{-1} = y$$

$$\Leftrightarrow a^{-1}.a.x.a^{-1} = a^{-1}.y.a$$

$$\Leftrightarrow e.x.a^{-1}.a = a^{-1}.y.a$$

$$\Leftrightarrow x.a^{-1}.a = a^{-1}.y.a$$

$$\Leftrightarrow x = a^{-1}.y.a \in G$$

إذن كل عنصر y من G يقبل سابق وحيد $x = a^{-1}.y.a$

إذن f_a تقابل.

ومنه f_a تشاكل تقابلي من $(G, .)$ نحو $(G, .)$.

(2) (a) لنبين أن "o" قانون تركيب داخلي في F .

ليكن f_a, f_b من F . لنبين أن $f_a \circ f_b \in F$

ليكن $x \in G$. لنحسب $f_a \circ f_b(x)$

$$f_a \circ f_b(x) = f_a(f_b(x))$$

$$= f_a(b.x.b^{-1})$$

$$= a.b.x.b^{-1}.a^{-1} = a.b.x.(a.b)^{-1} = f_{ab}(x)$$

$$(\forall x \in G): f_a \circ f_b(x) = f_{ab}(x) \quad \text{إذن:}$$

$$\begin{cases} x.a = a.x & (1) \\ y.a = a.y & (2) \end{cases}$$

لدينا من (2): $(y.a)^{-1} = (a.y)^{-1}$

يعني:

$$a^{-1}.y^{-1} = y^{-1}.a^{-1}$$

إذن:

$$\begin{cases} x.a = a.x \\ a^{-1}.y^{-1} = y^{-1}.a^{-1} \end{cases}$$

$$x.a.a^{-1}.y^{-1} = a.x.y^{-1}.a^{-1} \quad \text{إذن:}$$

$$x.e.y^{-1} = a.x.y^{-1}.a^{-1} \quad \text{يعني:}$$

$$x.y^{-1} = a.x.y^{-1}.a^{-1} \quad \text{يعني:}$$

$$x.y^{-1}.a = a.x.y^{-1}.a^{-1}.a \quad \text{يعني:}$$

$$x.y^{-1}.a = a.x.y^{-1}.e \quad \text{يعني:}$$

$$x.y^{-1}.a = a.x.y^{-1} \quad \text{يعني:}$$

$$(\forall (x, y) \in C_a^2) \quad x.y^{-1} \in C_a \quad \text{إذن:}$$

ومنه C_a زمرة جزئية ل $(G, .)$

(*) لنبين أن $Z(G)$ زمرة جزئية ل $(G, .)$:

← لدينا: $(\forall y \in G): e.y = y.e = y$

$$e \in Z(G) \quad \text{إذن}$$

← ليكن b من $Z(G)$. لنبين أن: $a.b^{-1} \in Z(G)$

$$(\forall y \in G): (a.b^{-1}).y = y.(a.b^{-1}) \quad \text{يعني:}$$

$$(a.b^{-1}).y = y.(a.b^{-1}) \quad \text{ليكن } y \in G \text{ لنبين أن:}$$

- لدينا b من $Z(G)$. إذن:

$$\begin{cases} a.y = y.a & (1) \\ b.y = y.b & (2) \end{cases}$$

وبنفس الطريقة السابقة نجد:

$$(a.b^{-1}).y = y.(a.b^{-1})$$

إذن:

$$(\forall y \in G): (a.b^{-1}).y = y.(a.b^{-1})$$

$$a.b^{-1} \in Z(G) \quad \text{إذن}$$

ومنه $Z(G)$ زمرة جزئية ل $(G, .)$.

5- تشاكل زمرة:

خاصية:

لتكن $(G, *)$ زمرة. E مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي T . و

$$f: (G, *) \rightarrow (E, T) \quad \text{تشاكل.}$$

لدينا ما يلي:

(*) $(f(G), T)$ زمرة.

(*) إذا كانت $(G, *)$ زمرة تبادلية فإن $(f(G), T)$ زمرة تبادلية.

(*) إذا كان f تشاكل شمولي، فإن: $f(G) = E$ إذن: (E, T) زمرة.

نقول إن التشاكل يحول زمرة إلى زمرة.

(2) تعريف حلقة:

تعريف:

لتكن A مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين $*$ و T نقول إن $(A, *, T)$ حلقة إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

- $(A, *)$ زمرة تبادلية.
- T تجميعي.
- T توزيعي بالنسبة ل $*$

ملاحظات:

- $*$ إذا كان القانون T تبادلي. نقول إن الحلقة A تبادلية.
- $*$ إذا كان للقانون T عنصر محايد، نقول إن الحلقة A وحادية.
- $*$ نرمز عادة للقانون $*$ ب "+" وللقانون T ب " $\times$ " ونرمز في هذه الحالة للعنصر المحايد ل $*$ ب 0 أو 0_A ويسمى صفر حلقة. ونرمز للعنصر المحايد ل T ب 1 أو 1_A .

(3) أمثلة:

1- كل من $(\mathbb{C}, +, \times), (\mathbb{R}, +, \times), (\mathbb{Q}, +, \times), (\mathbb{Z}, +, \times)$ حلقة تبادلية ووحادية.

2- $(F(X, \mathbb{R}), +, \times)$ حلقة تبادلية ووحادية.

(4) خاصيات:

خاصية (1):

لتكن $(A, *, T)$ حلقة صفرها e

لدينا: $(\forall a \in A): aTe = eTa = e$

ملاحظة:

إذا رمزنا ل $(A, *, T)$ ب $(A, +, \times)$ الخاصية تصبح:

$$(\forall a \in A): a \times 0 = 0 \times a = 0$$

برهان:

لدينا: $aT(e * e) = aTe$ (لأن $e * e = e$)

يعني: $(aTe) * (aTe) = aTe$

يعني: $(aTe) * (aTe) = (aTe) * e$

يعني: $aTe = e$ (لأن $(A, *)$ زمرة)

إذن: $aTe = e$

وبنفس الطريقة نبين أن $eTa = e$

ومنه $eTa = aTe = e$

خاصية (2):

لتكن $(A, *, T)$ صفرها e

نرمز ل a' لمماثل a في $(A, *)$.

لدينا: $(\forall (a, b) \in A^2): aTb' = a'Tb = (aTb)'$

ملاحظة:

إذا رمزنا ل $(A, *, T)$ ب $(A, +, \times)$ الخاصية تصبح:

$$(\forall (a, b) \in A^2): a \times (-b) = (-a) \times b = -(a \times b)$$

برهان:

لنبين أن: $(aTb)' = aTb'$

يعني: $(aTb) * (aTb') = e$ (لأن $*$ تبادلي).

إذن: $f_a of_b = f_{ab}$

ولدينا: $\begin{cases} a \in G \\ b \in G \end{cases}$ إذن $a.b \in G$

إذن $f_{ab} \in F$

وبالتالي $(\forall (f_a, f_b) \in F^2): f_a of_b \in F$

إذن " o " قانون تركيب داخلي في F .

(b) لنبين أن h تشاكل شمولي من $(G, .)$ نحو (F, o) .

← ليكن a, b من G . لنبين أن: $h(a.b) = h(a)oh(b)$

لدينا: $h(a.b) = f_{ab} = f_a of_b = h(a)oh(b)$

إذن h تشاكل.

← ولدينا h شمولي لأن كل عنصر f_a من F له سابق على الأقل a من G .

ومنه h تشاكل شمولي من $(G, .)$ نحو (F, o) .

$*$ لنبين أن (F, o) زمرة.

- لدينا $(G, .)$ زمرة.

- h و h تشاكل شمولي من $(G, .)$ نحو (F, o) .

إذن (F, o) زمرة.

(V) الحلقة:

(1) توزيعية قانون بالنسبة لآخر.

تعريف:

لتكن E مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين $*$ و T .

نقول إن T توزيعي بالنسبة ل $*$ إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall (x, y, z) \in E^3) xT(y * z) = (xTy) * (xTz) \quad (1)$$

$$(x * y)Tz = (xTz) * (yTz) \quad (2)$$

ملاحظة:

$*$ إذا كان القانون T تبادلي فإن إحدى الخاصيتين (1) أو (2) كافية.

$*$ إذا تحققت الخاصية (1) نقول إن T توزيعي بالنسبة ل $*$ على اليمين.

أمثلة:

1- الضرب توزيعي بالنسبة للجمع في كل من $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}$.

2- الجمع ليس توزيعيا بالنسبة للضرب:

$$x + (y \times z) \neq (x + y) \times (x + z)$$

3- الاتحاد توزيعي بالنسبة للتقاطع. والتقاطع توزيعي بالنسبة للاتحاد في $P(E)$.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4- الضرب توزيعي بالنسبة للجمع في $F(X, \mathbb{R})$

- لدينا:

$$\begin{aligned}(aTb) * (aTb') &= aT(b * b') \\ &= aTe \\ &= e\end{aligned}$$

إن

$$(aTb)' = aTb'$$

بنفس الطريقة نبين أن $(aTb)' = a'Tb$

(5) العناصر القابلة للمماثلة:

تعريف:

لتكن $(A, *, T)$ حلقة واحدة وحدتها $\mathcal{E}$.

نقول إن عنصرا a من A قابل للمماثلة أو يقبل مقلوبا إذا كان له مماثل بالنسبة للقانون T في A .

خاصية:

لتكن $(A, *, T)$ حلقة واحدة وحدتها $\mathcal{E}$.

ولتكن U مجموعة العناصر القابلة للمماثلة.

لدينا: (U, T) زمرة.

برهان:

- لدينا $U \neq \emptyset$ لأن $\mathcal{E} \in U$.

- لنبين أن T قانون تركيب داخلي في U .

ليكن $x, y \in U$ لنبين أن $(xTy) \in U$.

لدينا $xTy \in U$ من U إذن يقبلان مماثلين x'' و y'' في (A, T) .

إن xTy له مماثل هو $y''Tx''$.

إن $xTy \in U$

ومنه T قانون تركيب داخلي في U .

- لدينا T تجميعي في A . إذن تجميعي في U .

- لدينا: $(\forall a \in U): \mathcal{E}Ta = aT\mathcal{E} = a$

و $\mathcal{E} \in U$

إن $\mathcal{E}$ هو العنصر المحايد في U .

- ليكن $x \in U$ لنبين أنه يقبل ممثلا x'' في (U, T) .

لدينا $x \in U$ إذن يقبل ممثلا x'' في (A, T) .

ولدينا x'' يقبل ممثلا هو x إذن $x'' \in U$

إن x يقبل ممثلا هو x'' في (U, T) .

وبالتالي (U, T) زمرة.

(6) قواسم الصفر في حلقة:

مثال:

نعتبر الحلقة $(F(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \times)$ صفرها: $\theta: x \rightarrow 0$

ونعتبر الدالتين: $f: x \rightarrow |x| - x$

و: $g: x \rightarrow |x| + x$

لدينا:

$$(\forall x \in \mathbb{R}): (f.g)(x) = f(x).g(x)$$

$$= (|x| - x)(|x| + x)$$

$$= |x|^2 - x^2$$

$$= x^2 - x^2 = 0 = \theta(x)$$

إن: $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f.g = \theta$

لدينا إذن $f \neq \theta, g \neq \theta, f.g = \theta$

نقول إن g و f قاسمين للصفر في الحلقة $(F(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$.

تعريف (1):

ليكن $(A, *, T)$ حلقة صفرها 0_A

نقول إن عنصرا a من A قاسم للصفر إذا وفقط إذا كان:

$$aTb = 0_A \text{ و يوجد } b \neq 0_A \text{ بحيث: } aTb = 0_A$$

تعريف (2):

لتكن $(A, *, T)$ حلقة

نقول إن الحلقة $(A, *, T)$ كاملة (intègre) إذا كانت لا تحتوي على قواسم للصفر.

ملاحظة:

نعتبر الحلقة $(A, +, \times)$ صفرها 0_A .

1- يكون a قاسم للصفر إذا كان:

$$a \neq 0_A \text{ و يوجد } b \neq 0_A \text{ بحيث } a \times b = 0_A$$

2- تكون $(A, *, T)$ كاملة إذا وفق إذا كان:

$$(\forall (x, y) \in A^2) \begin{cases} x \neq 0_A \\ y \neq 0_A \end{cases} \Rightarrow x.y \neq 0_A$$

يعني:

$$(\forall (x, y) \in A^2) x.y = 0_A \Rightarrow \begin{cases} x = 0_A \\ \text{أو} \\ y = 0_A \end{cases}$$

أمثلة:

1- كل من $(\mathbb{C}, +, \times); (\mathbb{R}, +, \times); (\mathbb{Q}, +, \times); (\mathbb{Z}, +, \times)$ حلقة كاملة.

2- $(F(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \times)$ حلقة غير كاملة.

(7) حلقتان هامتان:

(a) حلقة المصفوفات المربعة:

← حلقة المصفوفات المربعة من الرتبة 2:

تعريف:

نسمي مصفوفة مربعة من الرتبة 2 بمعاملات حقيقية كل جدول على شكل:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{ حيث } d, c, b, a \text{ من } \mathbb{R}.$$

ونرمز لمجموعة هذه المصفوفات بـ $M_2(\mathbb{R})$

- نعرف على $M_2(\mathbb{R})$ الجمع والضرب كما يلي:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} \leftarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+cb' & ac'+cd' \\ ba'+db' & bc'+dd' \end{pmatrix} \leftarrow$$

خاصية:

$(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة غير تبادلية وواحدية.

صفرها المصفوفة المنعدمة: $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

وحدتها المصفوفة الوحيدة: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ وغير كاملة.

← حلقة المصفوفات المربعة من الرتبة 3:

تعريف:

نسمي مصفوفة مربعة من الرتبة 3 بمعاملات حقيقية كل جدول على شكل:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ حيث } a_{ij} \in \mathbb{R}$$

ونرمز لمجموعة هذه المصفوفات بـ $M_3(\mathbb{R})$

- نعرف الجمع والضرب في $M_3(\mathbb{R})$ بما يلي:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} \end{pmatrix}$$

باستعمال الترميز يمكن أن نعرف الجمع والضرب كما يلي:
نعتبر المصفوفة:

$$B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}} ; \quad A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$$

(* لدينا $A+B$ هي المصفوفة $S = (S_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$

حيث: $S_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

(* ولدينا $A.B$ هي المصفوفة $C = (C_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$

$$\text{حيث } C_{ij} = \sum_{k=1}^3 a_{ik} b_{jk}$$

مثال:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

خاصية:

$(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة غير تبادلية، غير كاملة وواحدية صفرها المصفوفة

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ وحدتها } 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ المنعدمة:}$$

(b) الحلقة $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

سبق وأن عرفنا الجمع والضرب في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ كما يلي:

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$$

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y}$$

خاصية:

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ حلقة تبادلية واحدية صفرها $\overline{0}$ وحدتها $\overline{1}$.

ملاحظة:

(* نعتبر $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ لدينا:

$$\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{0}$$

$$\overline{2} \neq \overline{0} \text{ و } \overline{3} \neq \overline{0}$$

إذن $\overline{2}$ و $\overline{3}$ قاسمان للصفر.

إذن $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ حلقة غير كاملة.

(* نعتبر $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ حيث n أولي.

$$(\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{0} \Rightarrow \overline{x \cdot y} = \overline{0}$$

$$\Rightarrow xy \equiv 0[n]$$

$$\Rightarrow n/xy$$

$$\Rightarrow n/x \text{ أو } n/y$$

$$\Rightarrow x \equiv 0[n] \text{ أو } y \equiv 0[n]$$

$$\Rightarrow \overline{x} = \overline{0} \text{ أو } \overline{y} = \overline{0}$$

إذن $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ حلقة كاملة.

(* نعتبر الحلقة $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ حيث n غير أولي.

إذن n يقبل قاسم فعلي موجب n_1 .

$$n = n_1 + n_2 \text{ يعني:}$$

n_1 قاسم فعلي موجب إذن n_2 قاسم فعلي موجب.

لدينا $1 < n_1 < n$ إذن $n \times n_1$ يعني $n_1 \not\equiv 0[n]$

و $1 < n_2 < n$ و $n \times n_2$ و $n_2 \not\equiv 0[n]$

يعني: $\overline{n_1} \neq \overline{0}$ و $\overline{n_2} \neq \overline{0}$

$$\overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = \overline{n} \text{ ولدينا:}$$

$$\overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = \overline{n} \text{ يعني:}$$

$$\overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = \overline{0} \text{ يعني:}$$

إذن $\overline{n_1}$ و $\overline{n_2}$ قاسمان للصفر.

ومنه: $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ حلقة غير كاملة.

خاصية:

الحلقة $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ كاملة إذا وفقط إذا كان n أولي.

تمرين:

نعتبر الحلقة $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ ، $n \in \mathbb{N}^*$

حدد العناصر القابلة للمماثلة.

- لدينا:

$$\begin{aligned} & (\bar{x} \text{ قابلة للمماثلة}) \Leftrightarrow (\exists x' \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) : \bar{x}.x' = \bar{1} \\ & \Leftrightarrow (\exists x' \in \mathbb{Z}) : x.x' \equiv 1[n] \\ & \Leftrightarrow (\exists x', k \in \mathbb{Z}) : xx' = 1 + nk \\ & \Leftrightarrow (\exists x', k \in \mathbb{Z}) : xx' - nk = 1 \\ & \Leftrightarrow x \wedge n = 1 \end{aligned}$$

إن مجموعة العناصر التي تقبل مقلوبا هي:

$$U = \{\bar{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} / x \wedge n = 1\}$$

ملاحظة:

لدينا $(U, \times)$ زمرة تبادلية.

(VI) الجسم: Corps

(1) تعريف:

لتكن k مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين $*$ و T .
نقول إن $(K, *, T)$ جسم إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:
 $(K, *, T)$ $*$ حلقة واحدة.
 $*$ كل عنصر بخلاف صفر الحلقة يقبل مائثلا بالنسبة ل T .

ملاحظة:

- 1- إذا كان القانون T تبادلي نقول إن الجسم K تبادلي.
- 2- يكون $(K, *, T)$ جسما إذا وفقط إذا كان:

$(K, *)$ زمرة.

$(K - \{0_k\}, T)$ زمرة.

T توزيعي بالنسبة ل $*$.

(2) أمثلة:

1- كل من $(\mathbb{C}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{Q}, +, \times)$ جسم تبادلي.

2- نعتبر الحلقة $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$ حيث p أولي.

لنبين أنها جسم.

- لدينا $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$ حلقة واحدة.

- ليكن $\bar{x} \neq \bar{0}$

يعني $p \nmid x$ يعني $x \notin p\mathbb{Z}$

وبما أن p أولي فإن $x \wedge p = 1$

إن حسب Bezout يوجد u و v بحيث:

$$pu + xv = 1$$

يعني: $\bar{p}.\bar{u} + \bar{x}.\bar{v} = \bar{1}$

يعني: $\bar{x}.\bar{v} = \bar{1}$

إن $\bar{x}$ يقبل مائثلا هو $\bar{v}$.

إن كل عنصر $\bar{x} \neq \bar{0}$ يقبل مقلوبا.

ومنه $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$ جسم.

خاصية:

إذا كان p أولي فإن $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$ جسم تبادلي.

3- نعتبر الحلقة $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$

- لدينا $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ - نعتبر المصفوفة}$$

لنتحقق هل A تقبل مقلوبا.

$$\text{لنبحث عن } A' = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{ بحيث: } A.A' = A'.A = I$$

لدينا:

$$A.A' = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ a+b & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ c+d=0 \\ a+b=0 \\ c+d=0 \end{cases}$$

وهذا مستحيل.

إن A لا تقبل مقلوبا A' .

ومنه $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ ليس جسما.

وبنفس نجد أن $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ ليس جسما.

(3) خاصيات:

خاصية (1):

ليكن $(K, +, \times)$ جسما.

لدينا كل عنصر من $K - \{0_k\}$ منتظم بالنسبة للضرب.

يعني: $(\forall a \in K - \{0_k\})(\forall (x, y) \in K^2):$

$$\begin{cases} a.x = a.y \Rightarrow x = y \\ x.a = y.a \Rightarrow x = y \end{cases}$$

خاصية (2):

ليكن $(K, +, \times)$ جسما.

لدينا:

$$(\forall (x, y) \in K^2): x.y = 0_k \Rightarrow x = 0_k \text{ أو } y = 0_k$$

استنتاج: كل جسم هو حلقة كاملة.

خاصية (3):

ليكن $(K, +, \times)$ جسما.

نعتبر المعادلة $a \times x = b$

$*$ إذا كان $a \neq 0_k$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا $x = a^{-1}b$.

$*$ إذا كان $a = 0_k$ و $b \neq 0_k$ فإن المعادلة ليس لها حل.

$*$ إذا كان $a = 0_k$ و $b = 0_k$ فإن $S = K$

نفس الشيء بالنسبة للمعادلة $x \times a = b$.

تمارين تطبيقية:

تمرين (1):

$$L = \left\{ \begin{array}{l} f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow ax / a \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

نعتبر :
بين أن: $(L, +, \circ)$ جسم تبادلي.

تمرين (2):

$$E = \left\{ M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+b \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

نعتبر
بين أن $(E, +, \times)$ جسم تبادلي.