الثانية بكالوريا علوم رياضية	المخروطيات	الأستاذ : الحيان

التمرين 1 :

في المستوى $(\mathcal{P})$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ؛ نعتبر المنحنيين : (E) و (H) حيث :

$$(E) \quad : \quad (2x-4)^2+y^2=36$$

$$(H) \quad : \quad y^2-(2x+4)^2=4$$

1. حدد طبيعة كل من المنحنيين (E) و (H) ثم حدد العناصر المميزة لكل منهما.
2. نعتبر المنحنى (Γ) المعرف بالمعادلة :

$$4x|x|+y^2-16x-20=0$$

أ- بين أن (Γ) هو اتحاد جزء من (E) وجزء من (H) .

ب- أنشئ (Γ) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

التمرين 2 :

المستوى $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر الهذلول $(\mathcal{H})$ الذي معادلته : $x^2-\frac{y^2}{4}=1$.

1. أ- حدد رأسي $(\mathcal{H})$ وبؤرتيه F و F' ومقاربيه .

ب- أنشئ $(\mathcal{H})$.

2. حدد معادلة المماس (T) للهذلول $(\mathcal{H})$ في النقطة $M_0(\sqrt{5},4)$.
3. بين أن المسقط العمودي للبؤرة F على (T) ينتمي إلى الدائرة التي مركزها O وشعاعها 1.

التمرين 3 :

المستوى $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. نعتبر النقطتين $F(3,2)$ و $F'(1,2)$. ولتكن (E) مجموعة النقط M بحيث : $MF+MF'=4$.

أ- حدد طبيعة (E) .

ب- أكتب المعادلة المختصرة ل (E) .

2. ليكن $(\mathcal{H})$ الهذلول الذي معادلته : $3x^2-4y^2-12x=0$. أعط المعادلة المختصرة ل $(\mathcal{H})$. حدد رأسي $(\mathcal{H})$.
3. أنشئ (E) و $(\mathcal{H})$ في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

التمرين 4 :

في المستوى $(\mathcal{P})$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$؛ نعتبر المجموعتين (E) و $(\mathcal{H})$ المعرفتين على التوالي بالمعادلتين :

$$(E) \quad : \quad 4y^2=-9x^2+36x$$

$$(\mathcal{H}) \quad : \quad 4y^2=9x^2-36x$$

1. بين أن (E) إهليليج محددا مركزه ورؤوسه.
2. بين أن $(\mathcal{H})$ هذلول محددا رأسيه ومقاربيه .
3. أنشئ في المستوى المنسوب إلى المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المجموعة (Γ) المعرفة بالمعادلة : $4y^2=|9x^2-36x|$.

التمرين 5 :

المستوى $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$. نعتبر في $(\mathcal{P})$ المخروطي (Γ) الذي بؤرته النقطة $F(1,3)$ ودليله المرتبط بالبؤرة F هو المستقيم (D) الذي معادلته : $y=\frac{25}{3}$ وتباعده المركزي $e=\frac{3}{5}$.

1. أ- حدد طبيعة المخروطي (Γ) وتحقق من أن (Γ) هي مجموعة النقط M التي تحقق : $25MF^2=9MH^2$.

ب- بين أن : $25x^2+16y^2-50x-375=0$ معادلة ديكارتية للمخروطي (Γ) .

2. بين أن النقطة $\Omega(1,0)$ هي مركز المخروطي (Γ) وأن معادلته المختصرة في المعلم $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ هي : $\frac{X^2}{16}+\frac{Y^2}{25}=1$ ثم أنشئ (Γ) .

التمرين 6 :

في المستوى $(\mathcal{P})$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ؛ نعتبر النقطة $\Omega(-1,1)$ والهذلول $(\mathcal{H})$ الذي معادلته :

$$x^2-9y^2+2x+18y-17=0$$

1. أ- بين أن المعادلة المختصرة للهذلول $(\mathcal{H})$ في المعلم $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ هي : $\frac{X^2}{9}-Y^2=1$.

ب- حدد رأسي $(\mathcal{H})$ وبؤرتيه F و F' ومقاربيه في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2. أنشئ الهذلول $(\mathcal{H})$.

التمرين 7 :

في المستوى $(\mathcal{P})$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ؛ نعتبر النقطتين $F(0,\sqrt{5})$ و $F'(0,-\sqrt{5})$ و (E) مجموعة النقط $M(x,y)$ بحيث : $|MF-MF'|=4$.

1. حدد طبيعة المجموعة (E) .
2. أ- بين أن : $MF^2-MF'^2=-4y\sqrt{5}$.

ب- استنتج أن : $MF^2=\left(2-y\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$.

جـ- بين أن المعادلة المختصرة للمجموعة (E) هي: $x^2-\frac{y^2}{4}=-1$

3. أنشئ المجموعة (E) .

التمرين 8 :

في المستوى $(\mathcal{P})$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$؛ نعتبر النقطتين $F(0,4)$ و $F'(0,-4)$ و (E) مجموعة النقط $M(x,y)$

بحيث : $MF + MF' = 10$.

1. حدد طبيعة المجموعة (E) .
2. أ- بين أن : $MF^2 - MF'^2 = -16y$.

ب- استنتج أن $MF = 5 - \frac{4}{5}y$.

جـ- بين أن : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

3. أنشئ المجموعة (E) .

التمرين 9 :

المستوى $(\mathcal{P})$ منسوب إلى ملعم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر (Γ) مجموعة النقط $M(x,y)$ التي تحقق: $16y^4 = (x^2-4)^2$

1. أ- بين أن : $16y^4 = (x^2-4)^2$ تكافئ

$(x^2-4y^2-4)(x^2+4y^2-4)=0$

ب- استنتج أن (Γ) هي اتحاد هذلول $(\mathcal{H})$ وإهليلج (E) .

2. أ- حدد رأسي $(\mathcal{H})$ وبؤرتيه ومقاربيه .

ب- تحقق من أن $M_0\left(\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$ تنتمي إلى الإهليلج (E) وحدد معادلة ديكارتية لمماس (E) في النقطة M_0 .

3. أنشئ المجموعة (Γ) .

التمرين 10 :

المستوى $(\mathcal{P})$ منسوب إلى ملعم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$. نعتبر في $(\mathcal{P})$ المخروطي (Γ) الذي بؤرته النقطة $F(2,1)$ ودليله المرتبط بالبؤرة F هو المستقيم (D) الذي معادلته : $x=\frac{1}{2}$ وتباعده المركزي $e=2$.

1. أ- حدد طبيعة المخروطي (Γ) وتحقق من أن (Γ) هي مجموعة النقط M التي تحقق : $MF^2 = 4MH^2$.

ب- بين أن : $3x^2 - y^2 + 2y - 4 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمخروطي (Γ) .

2. أ- بين أن النقطة $\Omega(0,1)$ هي مركز المخروطي (Γ) وحدد رأسيه ومقاربيه في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

ب- أنشئ المخروطي (Γ) .

التمرين 11 :

في المستوى $(\mathcal{P})$ منسوب إلى ملعم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ؛ نعتبر المجموعة (E) المعرفة بالمعادلة : $x^2 - 2y^2 + 4xy - 12 = 0$

نضع : $\vec{u} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\vec{i} + \frac{\sqrt{5}}{5}\vec{j}$ و $\vec{v} = -\frac{\sqrt{5}}{5}\vec{i} + \frac{2\sqrt{5}}{5}\vec{j}$.

1. بين أن $(O,\vec{u},\vec{v})$ معلم متعامد ممنظم للمستوى $(\mathcal{P})$.
2. أكتب معادلة المنحنى (E) بالنسبة للمعلم $(O,\vec{u},\vec{v})$.
3. استنتج طبيعة وعناصر المجموعة (E) .

التمرين 12 :

في المستوى $(\mathcal{P})$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$؛ نعتبر المجموعة : $(E) \quad : \quad 5x^2 + 5y^2 + 8xy - 9 = 0$.

و ليكن $r = R\left(O,\frac{\pi}{4}\right)$ الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

وليكن $(O,\vec{u},\vec{v})$ المعلم المتعامد الممنظم صورة المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ بالدوران r .

1. أكتب معادلة (E) بالنسبة للمعلم $(O,\vec{u},\vec{v})$ ثم استنتج طبيعة (E)
2. حدد العناصر المميزة للمجموعة (E) ثم أنشئ (E) .

التمرين 13 :

في المستوى $(\mathcal{P})$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ؛ نعتبر المخروطي (Γ_m) المعرف بمعادلته الديكارتية :

$$mx^2 + (2m-7)y^2 + (m-4)x - m = 0$$

حيث m بارامتر حقيقي و $m \in \mathbb{R} - \left\{0,\frac{7}{2}\right\}$.

1. أ- حدد مجموعة الأعداد الحقيقية m التي يكون من أجلها (Γ_m) إهليليجا .

ب- حدد العناصر المميزة ل (Γ_4) (البؤرتان و الدليلان و التباعد المركزي) ثم أنشئ (Γ_4) .

2. لكل n من $\mathbb{N}$ نعتبر النقطة M_n ذات الأفصول x_n المعرفة كالتالي M_0 هي النقطة O. نحصل على M_{n+1} انطلاقا من M_n بالطريقة التالية :

المستقيم المار من M_n والموازي للمستقيم (D) ذي المعادلة : $y=-x$ يقطع (Γ_4) في نقطتين إحداهما أفصولها سالب نسميها E_n و E'_n مماثلة النقطة E_n بالنسبة لمحور الأراتيب .

M'_n هي المسقط العمودي ل E'_n على محور الأفاصيل وتكون M_{n+1} هي منتصف القطعة $[M_nM'_n]$.

أ- بين أن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هي المتتالية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = f(x_n) \quad , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

حيث: $f(x) = \frac{1}{5}\left(\sqrt{5-x^2} + 2x\right)$.

ب- بين أن : $\exists k \in]0,1[\quad / \quad \forall x \in [0,1] \quad : \quad |f'(x)| \le k$.

جـ- بين باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية أن :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad \left|x_{n+1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| \le k\left|x_n - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| .$$

د- استنتج أن المتتالية العددية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

بالتوفيق إنشاء الله