

المنحنى من الدرجة الثانية المخروطيات

مثال 1 :

في المستوى المنسوب إلى معلم متعمد منظم (O, \vec{i}, \vec{j}) ؛ نعتبر المجموعة : $\{M(x, y) \in P / 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 8 = 0\}$

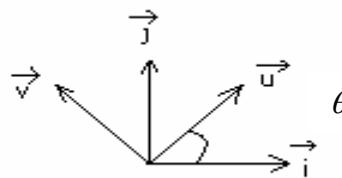
$$\vec{v} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \quad \text{و} \quad \vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \quad \text{في المستوى المتجهي } V_2; \text{ نعتبر المتجهين :}$$

1. حدد معادلة ديكارتية للمنحنى (E) في المعلم $(\vec{O}, \vec{u}, \vec{v})$ ثم استنتج طبيعة المنحنى (E) .

2. أنشئ المنحنى (E) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j})

الحل : تذكير :

إذا كان (\vec{i}, \vec{j}) و (\vec{u}, \vec{v}) أساسان متعمدان مننظمان حيث : $\theta[2\pi]$ فإن :



$$\vec{v} = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} \quad \text{و} \quad \vec{u} = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$$

$$\vec{v} = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{i} + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i} + \vec{j}) \quad \text{و} \quad \vec{u} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$$

يتم اختيار $\theta = \frac{\pi}{4}$ بحيث تكون معادلة (E) غير محتوية على الحد xy .

نعتبر M نقطة من المستوى P بحيث :

. (O, \vec{u}, \vec{v}) هو زوج إحداثي النقطة M بالنسبة للمعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) و (X, Y) هو زوج إحداثي النقطة M بالنسبة للمعلم (x, y) .

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = X\vec{u} + Y\vec{v} \Leftrightarrow x\vec{i} + y\vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}X(\vec{i} + \vec{j}) + \frac{\sqrt{2}}{2}Y(-\vec{i} + \vec{j})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

$$M \in (E) \Leftrightarrow 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}(X - Y)^2 + \frac{5}{2}(X + Y)^2 + \frac{6}{2}(X - Y)(X + Y) - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5(X^2 - 2XY + Y^2) + 5(X^2 + 2XY + Y^2) + 6(X^2 - Y^2) - 16 = 0 \quad \text{و منه فإن :}$$

$$\Leftrightarrow 16X^2 + 4Y^2 - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{X^2}{1^2} + \frac{Y^2}{2^2} = 1$$

إذن (E) إهليج مرکزه $O(0,0)$ ورؤوسه بالنسبة للمعلم (O, \vec{u}, \vec{v}) هي : $A(1,0)$ و $B(0,2)$ و $A'(-1,0)$ و $B'(0,-2)$.

لدينا : $a = 1$ و $b = 2$. بما أن $a < b$ فإن : $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ و منه فإن بورتي الإهليج (E) بالنسبة للمعلم

$$(D'): Y = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \quad \text{و} \quad (D): Y = \frac{4\sqrt{3}}{3}. \quad \text{ودليلاه هما : } F'(0 - \sqrt{3}) \quad \text{و} \quad F(0, \sqrt{3}) \quad \text{و} \quad (O, \vec{u}, \vec{v})$$

تباعده المركزي هو : $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

. إذن بالنسبة للمعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) نحصل على :

$$\begin{cases} X = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \\ Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y) \end{cases} \quad \text{فإن:} \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \end{cases}$$

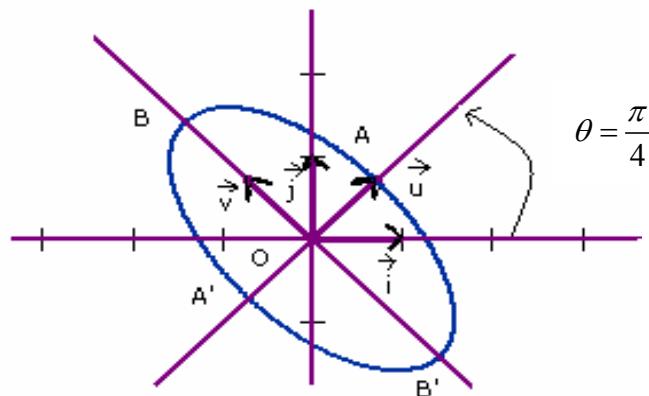
. $B'(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ و $B(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ و $A'(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ و $A(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$: رؤوس (E) هي :

. $F'(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2})$ و $F(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2})$: بورتي (E) هما :

$(D'): \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ و $(D): \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y) = \frac{4\sqrt{3}}{3}$: دليلا (E) هما :

$(D'): x + y = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ و $(D): -x + y = \frac{4\sqrt{6}}{3}$: أي :

: (O, \vec{i}, \vec{j}) في المعلم إنشاء الإهليلじج (E) في المعلم :



مثال 2 : الطريقة الثانية تعتمد على الدوران

في المستوى المنسوب إلى معلم متعدد منظم (O, \vec{i}, \vec{j}) ؛ نعتبر المجموعة $(E) = \{M(x, y) \in P / 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 8 = 0\}$

ونعتبر الدوران R الذي مرکزه $O(0,0)$ وزاويته $\theta = \frac{\pi}{4}$.

1. أكتب معادلة ديكارتية للمجموعة $[R(E)]$ في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) ثم استنتج طبيعة $[R(E)]$.

2. حدد طبيعة المجموعة (E) ثم أنشئها في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

الحل : لتكن M نقطة من المستوى P بحيث :

(x, y) هو زوج إحداثي النقطة M بالنسبة للمعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) و (X, Y) هو زوج إحداثي النقطة $M' = R(M)$ بالنسبة للمعلم

لدينا : . لدينا (O, \vec{u}, \vec{v})

$$M' = R(M) \Leftrightarrow \begin{cases} X = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)x - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)y \\ Y = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)x + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) \\ Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-X + Y) \end{cases}$$

$\begin{cases} X = \cos(\theta)x - \sin(\theta)y \\ Y = \sin(\theta)x + \cos(\theta)y \end{cases}$: الصيغة التحليلية للدوران $R(O, \theta)$ هي **تذكير :**

لدينا : $M'(X, Y) \in R(E)$ إذن $M'(X, Y) = R(M)$ ومنه فان $\exists M(x, y) \in E / M' = R(M)$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-X + Y) \end{cases} \quad \text{و} \quad 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 8 = 0$$

$$5 \times \frac{1}{2}(X + Y)^2 + 5 \times \frac{1}{2}(-X + Y)^2 + 6 \times \frac{1}{2}(X + Y)(-X + Y) - 8 = 0 \quad \text{إذن :}$$

$$5(X^2 + Y^2 + 2XY) + 5(X^2 + Y^2 - 2XY) + 6(Y^2 - X^2) - 16 = 0 \quad \text{أي :}$$

يكافى : $O(0,0) = R(E)$. ومنه فإن $[R(E)] : \frac{X^2}{2^2} + \frac{Y^2}{1^2} = 1$ وبالتالي فإن $4X^2 + 16Y^2 = 16$. إهليلج مركزه (E') .

ولدينا : $a = 2$ و $b = 1$ إذن : $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. بالنسبة للمعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) لدينا :

- . $B'(0, -1)$ و $B(0, 1)$ و $A'(-2, 0)$ و $A(2, 0)$: رؤوس (E') هي
- . $F'(-\sqrt{3}, 0)$ و $F(\sqrt{3}, 0)$: بؤرتى (E') هما

$e = \frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ التباعد المركز لـ (E') هو :

. $(D') : x = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$ و $(D) : x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ دليلاً (E') هما

2. إنشاء المجموعة (E) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) في المعلم :

لدينا : $R\left(O, -\frac{\pi}{4}\right)((E')) = R\left(O, \frac{\pi}{4}\right)((E))$ وبما أن (E') إهليلج فإن (E) هو أيضاً إهليلج يستنتج من

الإهليلج (E') بالدوران الذي مركزه $O(0,0)$ وزاويته $\theta' = -\frac{\pi}{4}$ كما يلي :

