

المخروطيات المنحنيات من الدرجة الثانية

مثال 1 :

الطريقة الأولى تعتمد على تغيير المعلم بتغيير الأساس

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) ؛ نعتبر المجموعة : $(E) = \{M(x, y) \in P / 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 8 = 0\}$.

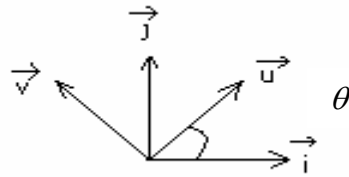
في المستوى المتجهي V_2 ؛ نعتبر المتجهتين : $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ و $\vec{v} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$.

1. حدد معادلة ديكارتية للمنحنى (E) في المعلم (O, \vec{u}, \vec{v}) ثم استنتج طبيعة المنحنى (E) .

2. أنشئ المنحنى (E) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

الحل : تذكير :

إذا كان (\vec{u}, \vec{v}) و (\vec{i}, \vec{j}) أساسان متعامدان ممنظمين حيث : $(\vec{i}, \vec{u}) \equiv \theta [2\pi]$ و $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ؛ فإن :



$$\vec{u} = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \quad \text{و} \quad \vec{v} = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}$$

في المثال ؛ لدينا : $\vec{u} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$ و $\vec{v} = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{i} + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i} + \vec{j})$.

يتم اختيار $\theta = \frac{\pi}{4}$ بحيث تكون معادلة (E) غير محتوية على الحد xy .

1. نعتبر M نقطة من المستوى P بحيث :

(x, y) هو زوج إحداثيات النقطة M بالنسبة للمعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) و (X, Y) هو زوج إحداثيات النقطة M بالنسبة للمعلم (O, \vec{u}, \vec{v}) .

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = X\vec{u} + Y\vec{v} \Leftrightarrow x\vec{i} + y\vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}X(\vec{i} + \vec{j}) + \frac{\sqrt{2}}{2}Y(-\vec{i} + \vec{j})$$

لدينا :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \end{cases}$$

$$M \in (E) \Leftrightarrow 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}(X - Y)^2 + \frac{5}{2}(X + Y)^2 + 6(X - Y)(X + Y) - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5(X^2 - 2XY + Y^2) + 5(X^2 + 2XY + Y^2) + 6(X^2 - Y^2) - 16 = 0 \quad \text{ومنه فإن :}$$

$$\Leftrightarrow 16X^2 + 4Y^2 - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{X^2}{1^2} + \frac{Y^2}{2^2} = 1$$

إن (E) إهليلج مركزه $O(0, 0)$ ورؤوسه بالنسبة للمعلم (O, \vec{u}, \vec{v}) هي : $A(1, 0)$ و $A'(-1, 0)$ و $B(0, 2)$ و $B'(0, -2)$.

لدينا : $a = 1$ و $b = 2$. بما أن $a < b$ فإن : $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ ومنه فإن بؤرتي الإهليلج (E) بالنسبة للمعلم

(O, \vec{u}, \vec{v}) هما $F(0, \sqrt{3})$ و $F'(0, -\sqrt{3})$. ودليلاه هما : $(D): Y = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ و $(D'): Y = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

تباعده المركزي هو : $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

وبما أن : $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \end{cases}$ فإن : $\begin{cases} X = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \\ Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y) \end{cases}$. إذن بالنسبة للمعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) نحصل على :

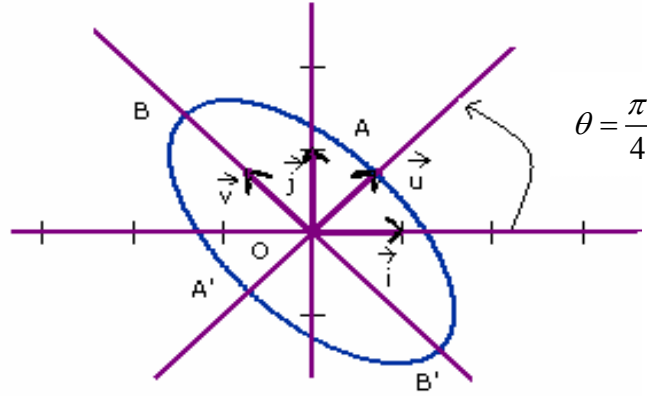
رؤوس (E) هي : $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ و $A'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ و $B\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ و $B'\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$.

بؤرتي (E) هما : $F\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ و $F'\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

دليلا (E) هما : $(D): \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y) = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ و $(D'): \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

أي : $(D): -x + y = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ و $(D'): x + y = \frac{4\sqrt{6}}{3}$.

إنشاء الإهليلج (E) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) :



مثال 2 : الطريقة الثانية تعتمد على الدوران

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) ؛ نعتبر المجموعة $(E) = \{M(x, y) \in P / 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 8 = 0\}$.

ونعتبر الدوران R الذي مركزه $O(0,0)$ وزاويته $\theta = \frac{\pi}{4}$.

1. أكتب معادلة ديكارتية للمجموعة $[R(E)]$ في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) ثم استنتج طبيعة $[R(E)]$.

2. حدد طبيعة المجموعة (E) ثم أنشئها في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

الحل : لتكن M نقطة من المستوى P بحيث :

(x, y) هو زوج إحداثيات النقطة M بالنسبة للمعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) و (X, Y) هو زوج إحداثيات النقطة $M' = R(M)$ بالنسبة للمعلم

(O, \vec{u}, \vec{v}) . لدينا :

$$M' = R(M) \Leftrightarrow \begin{cases} X = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)x - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)y \\ Y = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)x + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) \\ Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-X + Y) \end{cases}$$

تذكير : الصيغة التحليلية للدوران $R(O, \theta)$ هي : $\begin{cases} X = \cos(\theta)x - \sin(\theta)y \\ Y = \sin(\theta)x + \cos(\theta)y \end{cases}$

لدينا $M'(X, Y) \in R(E)$ إذن $M'(x, y) \in E / M' = R(M)$ ومنه فإن :

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-X + Y) \end{cases} \quad \text{و} \quad 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 8 = 0$$

$$5 \times \frac{1}{2}(X + Y)^2 + 5 \times \frac{1}{2}(-X + Y)^2 + 6 \times \frac{1}{2}(X + Y)(-X + Y) - 8 = 0 \quad \text{إذن :}$$

$$5(X^2 + Y^2 + 2XY) + 5(X^2 + Y^2 - 2XY) + 6(Y^2 - X^2) - 16 = 0 \quad \text{أي :}$$

$$4X^2 + 16Y^2 = 16 \quad \text{وبالتالي فإن :} \quad \frac{X^2}{2^2} + \frac{Y^2}{1^2} = 1 \quad [R(E)] : \quad \text{ومنه فإن } (E') = R(E) \text{ إهليلج مركزه } O(0,0)$$

ولدينا : $a = 2$ و $b = 1$ إذن : $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. بالنسبة للمعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) ؛ لدينا :

رؤوس (E') هي : $A(2,0)$ و $A'(-2,0)$ و $B(0,1)$ و $B'(0,-1)$.

بؤرتي (E') هما : $F(\sqrt{3},0)$ و $F'(-\sqrt{3},0)$.

التباعد المركز للإهليلج (E') هو : $e = \frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

دليلا (E') هما : $(D): x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ و $(D'): x = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

2. إنشاء المجموعة (E) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) :

لدينا : $(E') = R\left(O, \frac{\pi}{4}\right)((E))$ إذن : $(E) = R\left(O, -\frac{\pi}{4}\right)((E'))$ وبما أن (E') إهليلج فإن (E) هو أيضا إهليلج يستنتج من

الإهليلج (E') بالدوران الذي مركزه $O(0,0)$ وزاويته $\theta' = -\frac{\pi}{4}$ كما يلي :

