هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	الحسابيات حلول مقترحة	سلسلة 2

تمرين 1 : a و b و c أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة. (الأسئلة مستقلة)

1

نضع: $d=a\wedge b$ منه : $\exists(\sim,\ )\in IN^2\ /\ \begin{cases}a=d\sim\\ b=d\\ \sim\wedge\ =1\end{cases}$

و حيث أن : $(a\wedge b)(a\vee b)=ab$ فإن : $d.(a\vee b)=d^2\sim$ منه: $a\vee b=d\sim$ ، الآن ، لدينا :

$$(a\wedge b)+(a\vee b)=a+b\ \Leftrightarrow\ d+d\sim\ =d\sim+d\ \Leftrightarrow\ 1+\sim\ =\sim+\ \Leftrightarrow\ 1-\sim+\ (\sim-1)=0$$
$$(a\wedge b)+(a\vee b)=a+b\ \Leftrightarrow\ (\sim-1)(\ -1)=0\ \Leftrightarrow\ (\sim=1)\ ou\ (\ =1)\Leftrightarrow\ (a/b)\ \ ou\ \ (b/a)$$

2

- نفرض أن : $\left(a^2+ab+b^2\right)\wedge ab=1$ ، نضع : $a\wedge b=d$ منه:

$$\begin{cases}d/a\\ d/b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d/ab\\ d/b^2\\ d/a^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d/ab\\ d/a^2+ab+b^2\end{cases}\Rightarrow d/\left(a^2+ab+b^2\right)\wedge(ab)\Rightarrow d/1\Rightarrow d=1$$

- نفرض الآن أن : $a\wedge b=1$ ، إذن : $a\wedge b^2=1$ و $a^2\wedge b=1$

نضع : $\left(a^2+ab+b^2\right)\wedge a=d$ ، منه :

$$\begin{cases}d/a\\ d/a^2+ab+b^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d/a\\ d/a(a+b)\\ d/a^2+ab+b^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d/a\\ d/b^2\end{cases}\Rightarrow d/a\wedge b^2\Rightarrow d/1\Rightarrow d=1$$

و بنفس الطريقة نبين أن : $\left(a^2+ab+b^2\right)\wedge b=1$

الآن : $\begin{cases}\left(a^2+ab+b^2\right)\wedge a=1\\ \left(a^2+ab+b^2\right)\wedge b=1\end{cases}\Rightarrow\left(a^2+ab+b^2\right)\wedge ab=1$

خلاصة : $\left(a^2+ab+b^2\right)\wedge ab=1\ \Leftrightarrow\ a\wedge b=1$

للتذكير: $x\wedge y=1\Leftrightarrow x^n\wedge y^m=1$ و $x\wedge yz=1\Leftrightarrow\begin{cases}x\wedge y=1\\ x\wedge z=1\end{cases}$

هناك طرق أخرى لحل هذا التمرين (على الأقل أعرف طريقتين) ،لكننا فضلنا إدراج الطريقة التي يمكن تعميمها على أسئلة مشابهة.

3

- بداية نعلم أن : $(a\wedge c)/a$ و $(b\wedge c)/b$ منه : $(a\wedge c)(b\wedge c)/ab$ ، إذن : $c/(a\wedge c)(b\wedge c)\ \Rightarrow\ c/ab$

- من جهة أخرى ، نضع: $d=a\wedge c$ منه : $\exists(\sim,\ ^{a})\in IN^2\ /\ \begin{cases}a=d\sim\\ c=d^{\ a}\\ \sim\wedge\ ^{a}=1\end{cases}$

بين أن : $c/ab\Rightarrow d^{\ a}/d\sim b\Rightarrow\begin{cases}^{a}/\sim b\\ \sim\wedge\ ^{a}=1\end{cases}\Rightarrow\ ^{a}/b\ \Rightarrow\ ^{a}d/bd\ \Rightarrow c/b(a\wedge c)$

مرة أخرى نضع : $¢=b\wedge c$ منه : $\exists(p,q)\in IN^2\ /\ \begin{cases}b=¢\ p\\ c=¢\ q\\ p\wedge q=1\end{cases}$ منه :

$$c/b(a\wedge c)\Rightarrow\ ¢\ q/¢\ p\ (a\wedge c)\Rightarrow\begin{cases}q/\ p\ (a\wedge c)\\ p\wedge q=1\end{cases}\Rightarrow\ q/(a\wedge c)\Rightarrow ¢\ q/¢\ (a\wedge c)\Rightarrow c/(b\wedge c)(a\wedge c)$$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

4

نفرض أن : $a\wedge b=1$ ، إذن : $a^2\wedge b^2=1$ ، لدينا إذن:

$$\left(a^2-b^2\right)\wedge\left(a^3-b^3\right)=(a-b)(a+b)\wedge(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=(a-b)\left((a+b)\wedge\left(a^2+ab+b^2\right)\right)$$

نضع : $(a+b)\wedge\left(a^2+ab+b^2\right)=d$ ، إذن :

$$\begin{cases}d/a+b\\ d/a^2+ab+b^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d/a^2+ab\\ d/ab+b^2\\ d/a^2+ab+b^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d/a^2\\ d/b^2\end{cases}\Rightarrow d/a^2\wedge b^2\Rightarrow d/1\Rightarrow d=1$$

بالتالي: $\left(a^2-b^2\right)\wedge\left(a^3-b^3\right)=a-b$

تمرين 2 : n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

1

لدينا : $A=ab\left(a^2+b^2\right)\left(a^2-b^2\right)=\left(a^3b-ab^3\right)\left(a^2+b^2\right)$

لدينا حسب مبرهنة فيرما : $\begin{cases}a^3\equiv a[3]\\ b^3\equiv b[3]\end{cases}$ منه : $\begin{cases}ba^3\equiv ab[3]\\ ab^3\equiv ab[3]\end{cases}$ منه : $ba^3-ab^3\equiv 0[3]$ منه : $A\equiv 0[3]$

لدينا من جهة أخرى : $A=ab\left(a^4-b^4\right)=a^5b-ab^5$

لدينا حسب مبرهنة فيرما : $\begin{cases}a^5\equiv a[5]\\ b^5\equiv b[5]\end{cases}$ منه : $\begin{cases}ba^5\equiv ab[5]\\ ab^5\equiv ab[5]\end{cases}$ منه : $ba^5-ab^5\equiv 0[5]$ منه : $A\equiv 0[5]$

إذن : $3/A$ و $5/A$ ، وبما أن : $3\wedge 5=1$ فإن : $15/A$ ، بالتالي : $15/\ ab\left(a^2+b^2\right)\left(a^2-b^2\right)$

2

لدينا حسب مبرهنة فيرما : $n^7\equiv n[7]$

و $n^3\equiv n[3]$ منه: $n^6\equiv n^2[3]$ منه : $\begin{cases}n^7\equiv n^3[3]\\ n^3\equiv n[3]\end{cases}$ منه : $n^7\equiv n[3]$

و $n^2\equiv n[2]$ منه: $n^6\equiv n^3[2]$ منه : $n^7\equiv n^4\equiv n^2\equiv n[2]$

بما أن 2 و 3 و 7 أعداد أولية فيما بينها مثنى مثنى فإن: $\forall n\in IN\quad 42/n^7-n$

بالنسبة للعدد 2 يمكن دراسة حالات الزوجية فقط دون الحاجة لمبرهنة فيرما.

3

لدينا :

$$4^n+6n+8=4^n-1+6n+9=3\left(4^{n-1}+4^{n-2}+\ldots+4+1\right)+6n+9=3\left(4^{n-1}+4^{n-2}+\ldots+4+1+2n+3\right)$$

الآن لدينا :

$$\begin{aligned}1&\equiv 1[3]\\ 4&\equiv 1[3]\\ 4^2&\equiv 1[3]\\ \ldots.&\equiv ..[3]\\ 4^{n-1}&\equiv 1[3]\\ 4^n&\equiv 1[3]\end{aligned}$$

منه : $4^{n-1}+4^{n-2}+\ldots+4+1\equiv n[3]$ منه : $4^{n-1}+4^{n-2}+\ldots+4+1+2n+3\equiv 3n+3\equiv 0[3]$ ، إذن : $4^{n-1}+4^{n-2}+\ldots+4+1+2n+3=3k/k\in IN$

منه : $4^n+6n+8=9k$ ، بالتالي : بين أن : $9/4^n+6n+8$

4

لدينا : $6^n-1-5n=5\left(6^{n-1}+6^{n-2}+\ldots.+6+1-n\right)$

وبنفس طريقة السؤال السابق نبين أن : $\left(6^{n-1}+6^{n-2}+\ldots+6+1\right)-n\equiv n-n\equiv 0[5]$

منه : $\left(6^{n-1}+6^{n-2}+\ldots+6+1\right)-n=5k\quad /k\in IN$ بالتالي : بين أن : $6^n\equiv 1+5n[25]$

تمرين 3 : a و b و c و d أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة.

- إذا كان a زوجي فإن : a^{4b+d} و a^{4c+d} زوجيان ، وإذا كان a فردي فإن : a^{4b+d} و a^{4c+d} فرديان

في كلا الحالتين $a^{4b+d}-a^{4c+d}$ زوجي، منه : $a^{4b+d}-a^{4c+d}\equiv 0[2]$

- إذا كان $a\equiv 0[3]$ فإن : $a^{4b+d}\equiv 0[3]$ و $a^{4c+d}\equiv 0[3]$ منه : $a^{4b+d}-a^{4c+d}\equiv 0[3]$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

في الحالة الأخرى نستنتج أن : $3 \wedge a = 1$ إذن حسب مبرهنة فيرما نجد: $a^2 \equiv 1[3]$ منه : $a^{4b} \equiv 1[3]$ و $a^{4c} \equiv 1[3]$

منه : $a^{4b} \equiv a^{4c}[3]$ منه : $a^{4b+d} - a^{4c+d} \equiv 0[3]$ ، في كل الحالات نجد أن: $a^{4b+d} - a^{4c+d} \equiv 0[3]$

- إذا كان $a \equiv 0[5]$ فإن : $a^{4b+d} \equiv 0[5]$ و $a^{4c+d} \equiv 0[5]$ منه : $a^{4b+d} - a^{4c+d} \equiv 0[5]$

في الحالة الآخرى نستنتج أن : $5 \wedge a = 1$ إذن حسب مبرهنة فيرما نجد: $a^4 \equiv 1[5]$ منه : $a^{4b} \equiv 1[5]$ و $a^{4c} \equiv 1[5]$

منه : $a^{4b} \equiv a^{4c}[5]$ منه : $a^{4b+d} - a^{4c+d} \equiv 0[5]$ ، في كل الحالات نجد أن: $a^{4b+d} - a^{4c+d} \equiv 0[5]$

بما أن 2 و 3 و 5 أعداد أولية فيما بينها مثنى مثنى فإن: $a^{4b+d} - a^{4c+d} \equiv 0[30]$

تمرين 4 : p عدد أولي أكبر من 2 و n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.(السؤالان مستقلان)

1

بدراسة زوجية العدد n نستنتج بسهولة أن : $(n+1)^p \equiv n^p + 1[2]$

من جهة أخرى و حسب مبرهنة فيرما $\begin{cases} (n+1)^p \equiv n+1[p] \\ n^p \equiv n[p] \end{cases}$ منه : $(n+1)^p - n^p \equiv 1[p]$

أي : $(n+1)^p \equiv n^p + 1[p]$

وبما أن p عدد أولي أكبر من 2 فإن : $p \wedge 2 = 1$ بالتالي : $(n+1)^p \equiv n^p + 1[2p]$

2

لدينا $p > 2$ منه : $p^2 - p > 0$ ، منه : $n^{p^2} - n^p = n^p\left(n^{p^2-p} - 1\right)$

- إذا كان : $n \equiv 0[p]$ فإن : $n^2 \equiv 0[p^2]$ منه : $n^{p^2} - n^p = n^2 n^{p-2}\left(n^{p^2-p} - 1\right) \equiv 0[p^2]$
- في الحالة الأخرى يكون لدينا : $n \wedge p = 1$ ، إذن حسب مبرهنة فيرما نجد: $n^p \equiv 1[p]$

منه : $n^{p^2-p} - 1 = \left(n^p\right)^{p-1} - 1 = \left(n^p - 1\right)\left[\left(n^p\right)^{p-2} + \left(n^p\right)^{p-3} + \ldots + n^p + 1\right]$

من $n^p \equiv 1[p]$ نستنتج أن : $\left(n^p\right)^{p-2} + \left(n^p\right)^{p-3} + \ldots + n^p + 1 \equiv p \equiv 0[p]$

إذن : $n^p - 1 = p\sim / \sim \in IN$ و $\left(n^p\right)^{p-2} + \left(n^p\right)^{p-3} + \ldots + n^p + 1 \equiv \quad p / \quad \in IN$

منه: $n^{p^2} - n^p = n^p \sim \quad p^2$ ، منه : بين أن : $n^{p^2} \equiv n^p[p^2]$

في جميع الحالات نستنتج أن : $n^{p^2} \equiv n^p[p^2]$

تمرين 5 : n عدد صحيح طبيعي أكبر من 1 .

1

لدينا : $A_n = n^4 + n^2 + 1 = n^4 + 2n^2 + 1 - n^2 = \left(n^2+1\right)^2 - n^2 = \left(n^2+n+1\right)\left(n^2-n+1\right)$

وبما أن : $n^2 + n + 1 > 1$ و $n^2 + n + 1 = n(n-1) + 1 > 1$ ، إذن A_n غير أولي .

2

بدراسة زوجية العدد n نستنتج أن $n^4 + n^2$ زوجي ، إذن A_n عدد فردي

ما يعني أن التفكيك الأولي للعدد A_n لا يحتوي على العدد 2

3

بين أن : $n \wedge 3 = 1 \Rightarrow 3 / A_n$

لدينا حسب مبرهنة فيرما : $n \wedge 3 = 1 \Rightarrow n^2 \equiv 1[3] \Rightarrow n^4 \equiv 1[3] \Rightarrow n^4 + n^2 + 1 \equiv 3 \equiv 0[3] \Rightarrow 3 / A_n$

تمرين 6 : a و b و x أعداد من IN^* حيث $x > 1$ ، نضع : $a \wedge b = d$

1

لدينا : $a \wedge b = d$ $\exists (\sim, \ ) \in IN^2 \ / \begin{cases} a = d\sim \\ b = d \\ \sim \wedge \ = 1 \end{cases}$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

	ولدينا : $x^d \equiv 1[x^d-1]$ ، منه : $\begin{cases} x^{\sim d} \equiv 1[x^d-1] \\ x^{\ d} \equiv 1[x^d-1] \end{cases}$ منه : $\begin{cases} x^{\sim d}-1 \equiv 0[x^d-1] \\ x^{\ d}-1 \equiv 0[x^d-1] \end{cases}$ منه : $\begin{cases} x^d-1 / x^{\sim d}-1 \\ x^d-1 / x^{\ d}-1 \end{cases}$ إذن : $(x^d-1)/(x^a-1) \wedge (x^b-1)$	
	$(E) \quad ax+by=d$	
أ)	لدينا : $1= \quad \wedge \sim$ إذن حسب مبرهنة Bezout فإن: $\exists (x_0,y_0) \in Z^2 \ / \sim x_0 + \quad y_0 = 1$ منه : $d\,y_0 = d \quad \sim d\,x_0 +$ أي : $a\,x_0 + b\,y_0 = d$ ما يعني أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا (x_0,y_0) في Z^2	
ب)	$(E) \Leftrightarrow \sim x+ \quad y=1 \Leftrightarrow \sim x+ \quad y=\sim x_0 + \quad y_0 \Leftrightarrow \sim (x-x_0)= \quad (y_0-y)$ $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x-x_0= \quad k \\ y_0-y=\sim k \end{cases} / k \in Z \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x= \quad k+x_0 \\ y=y_0-\sim k \end{cases} / k \in Z$ بالتالي : $S=\{(\quad k+x_0 \ , y_0-\sim k \ ) / \ k \in Z\}$	
ج)	لنبحث عن إمكانية إيجاد زوج (x,y) من مجموعة الحلول السابقة حيث يكون : $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$ لدينا : $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+x_0 \geq 0 \\ y_0-\sim k \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq \dfrac{-x_0}{} \\ k \geq \dfrac{y_0}{\sim} \end{cases}$ إذن يكفي أن نأخذ : $k=k_0=Max\left(E\left(\dfrac{-x_0}{}\right);E\left(\dfrac{y_0}{\sim}\right)\right)+1$ مما يعني صحة العبارة : $\exists (u,v) \in IN^2 \ / \quad au-bv=d$ حيث : $u= \quad k_0+x_0$ و $v=-(y_0-\sim k_0)=\sim k_0-y_0$	2
د)	لدينا: $(x^{au}-1)-(x^{bv}-1)x^d = x^{au}-1-x^{bv+d}+x^d = x^{au}-1-x^{au}+x^d = x^d-1$	
	لدينا من جهة حسب السؤال الأول : $(x^d-1)/(x^a-1) \wedge (x^b-1) \quad (1)$ و من جهة أخرى : $\begin{cases} x^a \equiv 1[x^a-1] \\ x^b \equiv 1[x^b-1] \end{cases}$ منه : $\begin{cases} x^{au} \equiv 1[x^a-1] \\ x^{bv} \equiv 1[x^b-1] \end{cases}$ منه : $\begin{cases} x^a-1 / x^{au}-1 \\ x^b-1 / x^{bv}-1 \end{cases}$ و حيث أن : $(x^d-1)/(x^a-1) \wedge (x^b-1)$ فإن : $\begin{cases} (x^a-1) \wedge (x^b-1) / x^a-1 \\ (x^a-1) \wedge (x^b-1) / x^b-1 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} (x^a-1) \wedge (x^b-1) / x^{au}-1 \\ (x^a-1) \wedge (x^b-1) / x^{bv}-1 \end{cases}$ منه : $(x^a-1) \wedge (x^b-1) / (x^{au}-1)-(x^{bv}-1)x^d$ أي : $(x^a-1) \wedge (x^b-1) / x^d-1 \quad (2)$ من (1) و (2) نستنتج أن : $(x^a-1) \wedge (x^b-1) = (x^{a \wedge b}-1)$	3

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma