

أ-

$$\begin{cases} (Ferma) \ 6^{10} \equiv 1[11] \\ 6^2 \equiv 3[11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6^{530} \equiv 1[11] \\ 6^2 \equiv 3[11] \end{cases} \Rightarrow 6^{532} \equiv 3[11]$$

ب -

$$\begin{cases} 6^{4590} \equiv 1[11] \\ 6^2 \equiv 3[7] \end{cases} \Rightarrow 6^{4592} \equiv 3[11] \Rightarrow 3 \times 6^{4592} \equiv 9[11]$$

$$\begin{cases} 6^{70} \equiv 1[11] \\ 6^5 \equiv 10[7] \end{cases} \Rightarrow 6^{75} \equiv 10[11] \Rightarrow 4 \times 6^{4592} \equiv 7[11]$$

$$3 \times 6^{4592} + 4 \times 6^{75} + 6 \equiv 16[11]$$

$$6 \equiv 6[11]$$

$$a \equiv 22[11] \Rightarrow a \equiv 0[11]$$

تمرين 4

$$p \in IP - \{2\} \text{ و } n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{أ- بين أن : } n^p \equiv n[2]$$

$$\text{ب- استنتج أن : } (n+1)^p - (n^p + 1) \equiv 0[2p]$$

الحل

$$\text{أ- } n^p - n = n(n^{p-1} - 1) = n(n-1)(n^{p-2} + \dots + n + 1)$$

$$n(n-1) \text{ زوجي } n^p - n \text{ زوجي}$$

$$\text{و منه : } n^p \equiv n[p]$$

ب- حسب فيرما

$$\begin{cases} (n+1)^p \equiv n+1[p] \\ n^p \equiv n[p] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (n+1)^p \equiv n+1[p] \\ n^p + 1 \equiv n+1[p] \end{cases} \Rightarrow (n+1)^p - (n^p + 1) \equiv 0[p]$$

و من أ-

$$\begin{cases} (n+1)^p \equiv n+1[2] \\ n^p \equiv n[2] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (n+1)^p \equiv n+1[2] \\ n^p + 1 \equiv n+1[2] \end{cases} \Rightarrow (n+1)^p - (n^p + 1) \equiv 0[2]$$

إذن :

$$\begin{cases} (n+1)^p - (n^p + 1) \equiv 0[p] \\ (n+1)^p - (n^p + 1) \equiv 0[2] \end{cases} \Rightarrow (n+1)^p - (n^p + 1) \equiv 0[2p]$$

تمرين 5

$$(a; n; m; k) \in \mathbb{N}^*$$

$$p \in IP$$

بين أن :

$$\text{أ - } a^{n(p-1)+m} - a^{k(p-1)+m} \equiv 0[p]$$

ب - استنتج أن :

$$a^{12n+m} - a^{12k+m} \equiv 0[70]$$

الحل

$$\text{أ - إذا كان : } p \text{ يقسم } a$$

$$\text{فإن : } a^{n(p-1)+m} - a^{k(p-1)+m} \equiv 0[p]$$

الحسابيات

تمرين 1

$$\text{أ - بين أن : } 13 \text{ تقسم } 7 \times 3^{3n+4} + 5 \equiv 0[13]$$

$$\text{ب - حدد } k \text{ بحيث : } 13 \text{ تقسم } 5 \times 3^{49} + k$$

الحل

أ -

$$\begin{cases} 3^3 \equiv 1[13] \\ 3^4 \equiv 3[13] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{3n} \equiv 1[13] \\ 3^4 \equiv 3[13] \end{cases} \Rightarrow 3^{3n+4} \equiv 3[13]$$

$$3^{3n+4} \equiv 3[13] \Rightarrow 7 \times 3^{3n+4} \equiv 8[13] \Rightarrow 7 \times 3^{3n+4} + 5 \equiv 0[13]$$

ب -

$$\begin{cases} 3^{45} \equiv 1[13] \\ 3^4 \equiv 3[13] \end{cases} \Rightarrow 3^{49} \equiv 3[13]$$

$$3^{45} \equiv 3[13] \Rightarrow 5 \times 3^{45} + k \equiv 2 + k[13]$$

$$13 \text{ تقسم } 5 \times 3^{49} + k \text{ يعني : } 2 + k \equiv 0[13]$$

$$2 + k \equiv 0[13] \Leftrightarrow k \equiv 11[13]$$

$$k \in 13\mathbb{Z} + \{11\}$$

تمرين 2

$$b \geq 2; a \geq 2$$

q خارج القسمة الإقليدية ل : b على a

حدد باقي و خارج القسمة الإقليدية ل : (b+1)a⁹⁹ - 1 على

$$a^{100}$$

الحل

$$b = aq + r ; 0 \leq r \leq a-1$$

$$ba^{99} + a^{99} - 1 = a^{100}q + a^{99} + ra^{99} - 1 ; 0 \leq ra^{99} + a^{99} \leq a^{100}$$

$$(b+1)a^{99} - 1 = a^{100}q + (a^{99}(r+1) - 1) ; 0 \leq (a^{99}(r+1) - 1) \leq a^{100} - 1$$

تمرين 3

$$\text{أ - حدد باقي القسمة الإقليدية ل : } 6^{532} \text{ على } 11$$

$$\text{ب - } a = 3 \times 6^{4592} + 4 \times 6^{75} + 6$$

$$\text{بين أن : } 11 \text{ تقسم } a$$

الحل

$$a = n(n+1)(n+5)$$

بين أن : $a \equiv 0[6]$

الحل

$$\begin{array}{cccccc} n \equiv & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ n+1 \equiv & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ n+5 \equiv & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ a \equiv & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

تمرين 8

$$n \in \mathbb{N}$$

بين أن : $7(n(n+1))^2 \equiv 0[28]$

الحل

$$2/n(n+1) \equiv 0[2] \Rightarrow 4/(n(n+1))^2$$

إذن : $4/7(n(n+1))^2$

ولدينا : $7/7(n(n+1))^2$

إذن : $4 \vee 7/7(n(n+1))^2$

ومنه : $28/7(n(n+1))^2$

تمرين 9

بين أن : $n^2(n^2-1) \equiv 0[12]$

الحل

$$n^2(n^2-1) = n(n-1)(n+1) \equiv 0[12]$$

تمرين 10

$$n \in \mathbb{N}$$

حدد n بحيث : 7 تقسم n^2+3n-3

الحل

$$n^2+3n-3 \equiv 0[7] \Rightarrow n^2+3n-3-7n+7 \equiv 0[7]$$

$$\Rightarrow n^2-4n+4 \equiv 0[7]$$

$$\Rightarrow (n-2)^2 \equiv 0[7]$$

$$\Rightarrow n-2 \equiv 0[7]$$

$$\Rightarrow n \equiv 5[7]$$

إذن : $n \in 7\mathbb{N} + \{5\}$

تمرين 11

$$n \in \mathbb{N}$$

بين أن : $(n+1)^n \equiv 1[n^2]$

الحل

– إذا كان : p يقسم a

$$\text{فإن : } \begin{cases} a^{n(p-1)+m} \equiv a^m [p] \\ a^{k(p-1)+m} \equiv a^m [p] \end{cases} \text{ Ferma ; } a^{p-1} \equiv 1[p] \Rightarrow$$

$$a^{n(p-1)+m} - a^{k(p-1)+m} \equiv 0[p] \text{ إذن :}$$

ب – من أ :

$$(1) a^{6 \times 2n+m} - a^{6 \times 2k+m} \equiv 0[7] \Rightarrow a^{12n+m} - a^{12k+m} \equiv 0[7]$$

$$(2) a^{4 \times 3n+m} - a^{4 \times 3k+m} \equiv 0[5] \Rightarrow a^{12n+m} - a^{12k+m} \equiv 0[5]$$

$$(3) a^{1 \times 12n+m} - a^{1 \times 12k+m} \equiv 0[2] \Rightarrow a^{12n+m} - a^{12k+m} \equiv 0[2]$$

من : (3); (2); (1)

$$7/a^{12n+m} - a^{12k+m}; 5/a^{12n+m} - a^{12k+m}; 2/a^{12n+m} - a^{12k+m}$$

$$7 \vee 5 \vee 2/a^{12n+m} - a^{12k+m} \text{ إذن :}$$

$$70/a^{12n+m} - a^{12k+m} \text{ ومنه :}$$

$$a^{12n+m} - a^{12k+m} \equiv 0[70] \text{ إذن :}$$

تمرين 6

$$(a; b) \in \mathbb{Z}^2 \text{ و } p \in IP$$

أ- بين أن : $a \equiv b[p] \Leftrightarrow a^p \equiv b^p[p]$

ب- بين أن : $a^p \equiv b^p[p] \Rightarrow a^p \equiv b^p[p^2]$

الحل

أ- ($\Rightarrow$) بما أن : الموافقة منسجمة مع الضرب

$$a \equiv b[p] \Rightarrow a^p \equiv b^p[p]$$

($\Leftarrow$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ferma} \begin{cases} a^p \equiv a[p] \\ b^p \equiv b[p] \end{cases} \Rightarrow a \equiv b[p] \\ a^p \equiv b^p[p] \end{array} \right.$$

ب – من أ :

$$a^n \equiv b^n[p] \Rightarrow a \equiv b[p] \Rightarrow a = pq + b$$

$$a^p = (pq + b)^p = \sum_{i=0}^p C_p^i (pq)^i b^{p-i}$$

$$a^p = b^p + C_p^1 pq \times b^{p-1} + \sum_{i=2}^p C_p^i (pq)^i b^{p-i}$$

$$C_p^1 = p$$

$$a^p = b^p + p^2 q \times b^{p-1} + \sum_{i=2}^p C_p^i (pq)^i b^{p-i} \text{ إذن :}$$

$$a^p - b^p = p^2 q \times b^{p-1} + \sum_{i=2}^p C_p^i (pq)^i b^{p-i}$$

$$p^2 / \sum_{i=2}^p C_p^i (pq)^i b^{p-i} \text{ لدينا :}$$

$$p^2 / (a^p - b^p) \text{ إذن :}$$

$$a^p \equiv b^p[p] \Rightarrow a^p \equiv b^p[p^2] \text{ ومنه :}$$

تمرين 7

$$(S) \Rightarrow \begin{cases} \bar{5}x + \bar{4}y + \bar{6}x + \bar{3}y = \bar{1} + \bar{2} \\ \bar{6}x + \bar{3}y = \bar{2} \end{cases}$$

$$(S) \Rightarrow \begin{cases} \bar{4}x = \bar{3} \\ \bar{6}x + \bar{3}y = \bar{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{4}x = \bar{24} \\ \bar{6}x + \bar{3}y = \bar{2} \end{cases}$$

$$(S) \Rightarrow \begin{cases} x = \bar{6} \\ \bar{6}x + \bar{3}y = \bar{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \bar{6} \\ \bar{3}y = \bar{1} \end{cases}$$

$$(S) \Rightarrow \begin{cases} x = \bar{6} \\ \bar{3}y = \bar{15} \end{cases}$$

$$(S) \Rightarrow \begin{cases} x = \bar{6} \\ y = \bar{5} \end{cases}$$

$$S = \{(\bar{6}; \bar{5})\}$$

تمرين 15

1 - بين أن 131 أولي

2- حل في $\mathbb{Z}/133\mathbb{Z}$

$$(E) \quad \overline{132x^2 + 129x - 139} = 0$$

الحل

1 - الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{133}$ لا تقسم 133

إذن : 133 أولي

2- في : $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$: $(\bar{3} \neq \bar{0}; \bar{4} \neq \bar{0} \text{ mais } \bar{3} \times \bar{4} = \bar{0})$

$$(E) \Rightarrow \overline{132x^2 + 129x - 139} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \bar{2}x - \bar{8} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \bar{2}x + \bar{1} - \bar{9} = 0$$

$$\Rightarrow (x - \bar{4})(x + \bar{2}) = 0; \mathbb{Z}/131\mathbb{Z} \text{ corps}$$

$$\Rightarrow (x - \bar{4}) = 0 \text{ ou } (x + \bar{2}) = 0$$

$$\Rightarrow x = \bar{4} \text{ ou } x = -\bar{2} = \bar{129}$$

$$S = \{\bar{129}; \bar{5}\}$$

تمرين 16

حل في $\mathbb{Z}^2$

$$\text{أ- } 8x = 9y$$

$$\text{ب- } 8x + 6y = 12$$

الحل

$$\text{Gauss} \begin{cases} 8/9y \\ 8 \wedge 9 = 1 \end{cases} \Rightarrow 8/y \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}; y = 8k$$

$$\text{إذن : } 8x = 9 \times 8k \Rightarrow x = 9k$$

$$S = \{(9k; 8k) / k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\text{ب- } 8 \wedge 6 = 2$$

$$8x + 6y = 12 \Leftrightarrow 4x + 3y = 6$$

$$4x + 3y = 6 \text{ حل خاص لـ } (3; -2)$$

$$(n+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k n^k ; C_n^1 = n$$

$$(n+1)^n = C_n^0 n^0 + C_n^1 n^1 + \sum_{k=2}^n C_n^k n^k$$

$$(n+1)^n = 1 + n^2 + \sum_{k=2}^n C_n^k n^k$$

$$(n+1)^n = 1 + n^2 \left(1 + \sum_{k=2}^n C_n^k n^{k-2} \right)$$

$$(n+1)^n \equiv 1[n^2] : \text{ إذن}$$

تمرين 12

$$n \in \mathbb{Z} ; (a; b; d) \in \mathbb{Z}^{*3}$$

$$a = nb + d$$

$$a \wedge b = b \wedge d : \text{ بين أن}$$

الحل

$$b \wedge d / b ; b \wedge d / d \Rightarrow b \wedge d / b ; b \wedge d / nb + d$$

$$\Rightarrow b \wedge d / b ; b \wedge d / a$$

$$\Rightarrow b \wedge d / a \wedge b$$

$$a \wedge b / b ; a \wedge b / a \Rightarrow a \wedge b / b ; a \wedge b / nb + d$$

$$\Rightarrow a \wedge b / b ; a \wedge b / d$$

$$\Rightarrow a \wedge b / b \wedge d$$

تمرين 13

حل في $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

$$(E) \quad 2x^2 - 3x + 4 = 1$$

الحل

x	0	1	2	3	4	5
$\bar{2}x^2$	0	2	4	0	2	4
$\bar{3}x$	0	3	0	3	0	3
$\bar{4}$	4	4	4	4	4	4
(E)	4	3	2	1	0	5

$$S = \{\bar{3}\}$$

تمرين 14

حل في $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

$$(S) \quad \begin{cases} \bar{5}x + \bar{4}y = \bar{1} \\ \bar{6}x + \bar{3}y = \bar{2} \end{cases}$$

الحل

ج- حلول (E) في حالة : $x \wedge y \neq 1$

$$\begin{aligned} x \wedge y \neq 1 &\Rightarrow x \wedge y = 2 \\ &\Rightarrow 2/13k + 2 \\ &\Rightarrow 2/13k ; 2 \wedge 13 = 1 \\ &\Rightarrow 2/k \end{aligned}$$

$$S' = \{(38k + 6; 13k + 2) / k \in 2\mathbb{Z}\}$$

د- حلول (E) في حالة : $x \wedge y = 1$

$$S'' = \{(38k + 6; 13k + 2) / k \in 2\mathbb{Z} + \{1\}\}$$

تمرين 18

$$(a; b; c) \in \mathbb{Z}^{*3}$$

بين أن : $a \wedge b = 1 \Rightarrow a \wedge (bc) = a \wedge c$

الحل

$$\begin{aligned} a \wedge c / a ; a \wedge c / c &\Rightarrow a \wedge c / a ; a \wedge c / bc \\ &\Rightarrow a \wedge c / a \wedge (bc) \end{aligned}$$

$$a \wedge b = 1 \Rightarrow \exists (u; v) \in \mathbb{Z} ; au + bv = 1$$

$$\Rightarrow \exists (u; v) \in \mathbb{Z} ; acu + bcv = c$$

$$a \wedge (bc) / a ; a \wedge (bc) / bc \Rightarrow a \wedge (bc) / a ; a \wedge (bc) / acu + bcv$$

$$\Rightarrow a \wedge (bc) / a ; a \wedge (bc) / c$$

$$\Rightarrow a \wedge (bc) / a \wedge c$$

إن : $a \wedge b = 1 \Rightarrow a \wedge (bc) = a \wedge c$

تمرين 19

بين أن : $a \in \mathbb{N}^* - \{1\} ; n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

$$a^n + 1 \text{ premier} \Rightarrow a \text{ paire}$$

الحل

الإستلزام المضاد للعكس

$$a \text{ impaire} \Rightarrow a^n + 1 \text{ non premier}$$

$$a \text{ impaire} \Rightarrow a^n \text{ impaire}$$

$$\Rightarrow a^n + 1 \text{ paire}$$

$$\Rightarrow a^n + 1 \text{ non premier}$$

تمرين 20

$\overline{30407}_{(b)}$ يكتب في الأساس (b) على شكل : $\overline{12551}_{(10)}$

حدد : b

الحل

$$\overline{30407}_{(b)} \text{ يوجد في } 7$$

إن : $b > 7$

$$\overline{30407}_{(b)} = 3b^4 + 4b^2 + 7 = 12551$$

$$3b^4 + 4b^2 - 12544 = 0$$

$$\Delta = 388^2$$

$$b^2 = 64 \text{ ou } b^2 = \frac{-196}{3}$$

$$\boxed{b = 8} \quad \text{إن :}$$

(نستعمل مضاعفات 4 و 3 لتحديد الحل الخاص)

$$4 \wedge 3 = 1 \Leftrightarrow 4u + 3v = 1$$

الحل الخاص موجود لأن :

$$\Leftrightarrow 4 \times 6u + 3 \times 6v = 6$$

(يمكن كذلك استعمال خوارزمية إقليدس لتحديد الحل الخاص)

$$4x + 3y = 6 \Rightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ 4 \times 3 + 3 \times (-2) = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4(x - 3) + 3(y + 2) = 0$$

$$\Rightarrow 4(x - 3) = -3(y + 2)$$

$$\Rightarrow 3/4(x - 3) ; 4 \wedge 3 = 1$$

$$\Rightarrow 3/(x - 3)$$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x = 3k + 3$$

$$-3(y + 2) = 4 \times 3k \Rightarrow y = -4k - 2$$

إن :

$$S = \{(3k + 3; -4k - 2) / k \in \mathbb{Z}\}$$

تمرين 17

أ- حل في $\mathbb{Z}^2$: $13x - 38y = 2$ (E)

ب- ما هي القيم الممكنة ل : $x \wedge y$

ج- حدد S' حلول (E) في حالة : $x \wedge y \neq 1$

د- حدد S'' حلول (E) في حالة : $x \wedge y = 1$

الحل

أ -

$$(E) \Rightarrow 13x = 38y + 2$$

$$\Rightarrow 13x = 2(19y + 1)$$

$$\Rightarrow 2/13x ; 2 \wedge 13 = 1$$

$$\Rightarrow 2/x$$

$$\Rightarrow \exists x' \in \mathbb{Z} ; x = 2x'$$

$$(E) \Rightarrow 13 \times 2x' - 38y = 2$$

$$\Rightarrow 13x' - 19y = 1$$

$$13x' - 19y = 1 \quad (3; 2) \text{ حل خاص ل}$$

$$13x' - 19y = 1 \Rightarrow 13(x' - 3) - 19(y - 2) = 0$$

$$\Rightarrow 13(x' - 3) = 19(y - 2)$$

$$\Rightarrow 19/(x' - 3)$$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x' = 19k + 3$$

$$x' = 19k + 3 \Rightarrow 13 \times 19k = 19(y - 2)$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 13k + 2}$$

$$x' = 19k + 3 ; x = 2x' \Rightarrow \boxed{x = 38k + 6}$$

$$S = \{(38k + 6; 13k + 2) / k \in \mathbb{Z}\}$$

$$x \wedge y / x \text{ et } x \wedge y / y \Rightarrow x \wedge y / (13x - 38y)$$

$$\Rightarrow x \wedge y / 2$$

$$\text{إن : } x \wedge y = 1 \text{ أو } x \wedge y = 2$$

تمرين 21

$$\overline{xyz}_{(7)} = \overline{zyx}_{(9)}$$

حدد : $z ; y ; x$

الحل

الأعداد $z ; y ; x$ أصغر قطعاً من 7

$$\overline{xyz}_{(7)} = \overline{zyx}_{(9)} \Leftrightarrow x \times 7^2 + y \times 7 + z = z \times 9^2 + y \times 9 + x$$

$$\Leftrightarrow 48x - 2y - 80z = 0$$

$$\Leftrightarrow 24x - y - 40z = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 8(3x - 5z)$$

بما أن : $y < 7$ و $8/7$

فإن : $y = 0$

$$3x - 5z = 0 \Leftrightarrow 3x = 5z$$

ومنه : $\Rightarrow 3/z ; 5/x$

$$\Rightarrow z = 3 ; x = 5$$

$$\boxed{z = 3 ; y = 0 ; x = 5}$$

تمرين 22

حدد في أنظمة العد ذات الأساس 7 باقي القسمة الإقليدية لـ

$$\overline{12015051}_{(7)} \text{ على } 7^3$$

الحل

$$\overline{12015051}_{(7)} = 1 \times 7^7 + 2 \times 7^6 + 1 \times 7^4 + 5 \times 7^3 + 5 \times 7 + 1$$

$$= 7^3 (1 \times 7^4 + 2 \times 7^3 + 1 \times 7 + 5) + 5 \times 7 + 1$$

$$= 7^3 (1 \times 7^4 + 2 \times 7^3 + 1 \times 7 + 5) + \overline{51}_{(7)}$$

باقي القسمة الإقليدية لـ $\overline{12015051}_{(7)}$ على 7^3

$$\boxed{\overline{51}_{(7)}} \text{ هو :}$$