التمرين 1 :

نقبل أن : $\forall (a,b)\in \mathbb{N}^{*2} \ : \ a\wedge b=1 \Rightarrow a^2\wedge b^2=1$.

نضع : $\forall n\in \mathbb{N}^* \ : \ S_n=\sum_{p=1}^{n} p^3$.

لنحدد $S_n\wedge S_{n+1}$ ، لكل n من $\mathbb{N}^*$.

1. بين أن : $\forall n\in \mathbb{N}^* \ : \ S_n=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
2. نفترض أن n زوجي : $\exists k\in \mathbb{N}^* \ , \ n=2k$.
   - أ- بين أن لكل $k\in \mathbb{N}^*$ ، لدينا :
   $$S_{2k}\wedge S_{2k+1}=(2k+1)^2\left[k^2\wedge (k+1)^2\right]$$
   - ب- أحسب : $k\wedge (k+1)$ لكل $k\in \mathbb{N}^*$.
   - جـ- أحسب $S_{2k}\wedge S_{2k+1}$ ، لكل $k\in \mathbb{N}^*$.
3. نفترض أن n فردي : $\exists k\in \mathbb{N} \ , \ n=2k+1$.
   - أ- بين أن : $\forall k\in \mathbb{N} \ , \ (2k+1)\wedge(2k+3)=1$.
   - ب- أحسب $S_{2k+1}\wedge S_{2k+2}$ ، لكل $k\in \mathbb{N}$.
4. بين أن : $\exists! n\in \mathbb{N}^* \ , \ S_n\wedge S_{n+1}=1$.

التمرين 2 :

I. ليكن x عددا حقيقيا.

1. تحقق من أن : $x^2+4=(x^2+2)^2-4x^2$.
2. أكتب x^2+4 على شكل جداء ثلاثيتي الحدود من الدرجة الثانية بمعاملات نسبية.

II. ليكن $n\in \mathbb{N}$ بحيث $n\geq 2$. نضع : $d=A\wedge B$ حيث $A=n^2-2n+2$ و $B=n^2+2n+2$.

1. تحقق من أن n^2+4 ليس أوليا.
2. بين انه إذا كان m يقسم A و m يقسم n ، فإن m يقسم 2 .
3. بين انه إذا كان m يقسم A و m يقسم B ، فإن m يقسم $4n$
4. نفترض أن n فردي.
   - أ- بين أن A و B فرديان واستنتج أن d فردي.
   - ب- بين أن d يقسم n .
   - جـ- بين أن d يقسم 2 ، ثم أن $A\wedge B=1$.
5. نفترض أن n زوجي.
   - أ- بين أن 4 لا يقسم n^2-2n+2 .
   - ب- بين أنه يوجد عدد طبيعي فردي p بحيث $d=2p$.
   - جـ- بين أن p يقسم n وأن $d=2$.

التمرين 3 :

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=14 \\ u_{n+1}=5u_n-6 \ ; \ n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3 و u_4 ، ثم تظنن رقمي الوحدات ورقم العشرات في الكتابة في النظمة ذات الأساس 10 للعدد u_n .
2. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \ , \ u_{n+2}\equiv u_n \ [4]$.
   استنتج أن : $\forall k\in\mathbb{N} \ , \ u_{2k}\equiv 2 \ [4]$.
   وأن : $\forall k\in\mathbb{N} \ , \ u_{2k+1}\equiv 0 \ [4]$.
3. أ- بين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N} \ , \ 2u_n=5^{n+2}+3$.
   ب- استنتج أن : $\forall n\in\mathbb{N} \ , \ 2u_n\equiv 28 \ [100]$.
4. حدد رقمي الوحدات والعشرات في الكتابة في النظمة ذات الأساس 10 للعدد u_n .
5. تحقق من أن القاسم المشترك الأكبر لحدين متتابعين من المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هو عدد ثابت وأعط قيمته.

التمرين 4 :

نعتبر في $\mathbb{Q}$ المعادلة :

$$(1) \ : \ 78x^3+ux^2+vx-14=0$$

حيث $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$.

1. نفترض أن $\frac{14}{39}$ حل للمعادلة (1) .
   - أ- تحقق من أن : $14u+39v=1129$.
   - ب- باستعمال خوارزمية أقليدس ، محددا جميع مراحل الانجاز ، حدد زوجا (x,y) من عددين نسبيين بحيث :
   $$(2) \ : \ 14x+39y=1$$
   تحقق من أن $(-25,9)$ حل لهذه المعادلة.
   حدد مجموعة حلول المعادلة (2) .
   - جـ- استنتج حلا خاصا (u_0,v_0) للمعادلة :
   $$(3) \ : \ 14u+39v=1129$$
   حدد الحل العام للمعادلة (3) .
   - د- حدد الأزواج (u,v) التي من أجلها يكون u هو أصغر عدد صحيح طبيعي ممكن.
2. أ- فكك العددين 78 و 14 إلى جداء عوامل أولية.
   استنتج في $\mathbb{N}$ ، مجموعة قواسم 78 ومجموعة قواسم 14 .

ب- ليكن $\frac{p}{q}$ ، عنصرا من $\mathbb{Q}$ ، حلا جذريا للمعادلة (1).

بين أن : $p \wedge q = 1 \Rightarrow p \;/\; 14$ و $q \;/\; 78$.

جـ- حدد الأعداد الجذرية المرشحة لأن تكون حلولا للمعادلة (1)، و حدد الأعداد الموجبة منها.

التمرين 5 :

1. أ- حدد حسب زوجية العدد الصحيح الطبيعي n، العدد :

$$\left(n^2+1\right) \wedge \left(n+1\right)$$

ب- بين أن العدد n^2+1 ليس مربعا كاملا.

2. لتكن a و b و c أعدادا صحيحة طبيعية غير منعدمة بحيث :

$$a \wedge b = 1 \text{ و } a\left(n^2+1\right) = b^2\left(n+1\right)$$

أ- بين أن $a \wedge b^2 = 1$، ثم أن $a \leq n$ و $b \leq n$.

ب- بين أن $\left(n^2+1\right) \wedge \left(n+1\right) = 2$.

جـ- نضع $n^2+1 = 2p$ و $n+1 = 2q$ ، بحيث :

$$p \wedge q = 1 \text{ و } (p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$$

بين أن : $a = q$ و $b^2 = p$.

د- نفترض أن $b = a+1$. أحسب الأعداد a و b و c.

التمرين 6 :

1. أ- حدد، حسب قيم العدد الصحيح الطبيعي n، بواقي القسمة الأقليدية للعدد 7^n على 9.

ب- بين أن : $2005^{2005} \equiv 7 \; [9]$.

2. أ- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* \;,\; 10^n \equiv 1 \; [9]$.

ب- ليكن N عددا صحيحا طبيعيا مكتوبا في نظمة العد ذات الأساس 10. ليكن S مجموع أرقام العدد N .

بين أن : $N \equiv S \; [9]$.

جـ- استنتج أن : $9 \;/\; N \Leftrightarrow 9 \;/\; S$.

3. نعتبر العدد $A = 2005^{2005}$.

ليكن : B مجموع أرقام العدد A.

C مجموع أرقام العدد B .

D مجموع أرقام العدد C.

أ- بين أن : $A \equiv D \; [9]$..

ب- علما أن : $2005 < 10000$ ، بين أن A يكتب في نظمة العد العشري بأقل من 8020 رقما.

استنتج أن $B \leq 72180$.

جـ- استنتج أن : $C \leq 45$.

د- بملاحظة الأعداد الصحيحة الطبيعية الأصغر من 45، حدد عددا صحيحا طبيعيا m بحيث : $C \leq m$ و $m \leq 15$.

هـ- بين أن : $D = 7$.

التمرين 7 :

1. أ- أحسب : $\left(1+\sqrt{6}\right)^2$ و $\left(1+\sqrt{6}\right)^4$ و $\left(1+\sqrt{6}\right)^6$.

ب- طبق خوارزمية أقليدس على العددين 847 و 342.

2. ليكن $n \in \mathbb{N}^*$. نعتبر a_n و b_n العددين الطبيعيين المعرفين بما يلي : $\left(1+\sqrt{6}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{6}$.

أحسب a_1 و b_1.

باستعمال السؤال(1.أ-) ، أعط تعبيرا آخر لكل من a_n و b_n.

أ- أحسب a_{n+1} و b_{n+1} بدلالة a_n و b_n.

ب- بين أنه إذا كان 5 لا يقسم $a_n + b_n$ ، فإن 5 لا يقسم $a_{n+1} + b_{n+1}$ ، ثم بين أن لكل $n \in \mathbb{N}^*$، لدينا : 5 لا يقسم $a_n + b_n$.

جـ- بين أن : $a_n \wedge b_n = 1 \Rightarrow a_{n+1} \wedge b_{n+1} = 1$.

د- استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* \;,\; a_n \wedge b_n = 1$.

التمرين 8 :

ليكن a و b عددين نسبيين بحيث $a \wedge b = 1$.

نضع : $c = a^4 + b^4$

1. أ- ليكن x عددا نسبيا .

بين أنه إذا كان x زوجيا ، فإن $x^4 \equiv 0 \; [16]$

بين أنه إذا كان x فرديا ، فإن $x^4 \equiv 1 \; [16]$

ب- استنتج أن : $c \equiv 1 \; [16]$ أو $c \equiv 2 \; [16]$.

2. ليكن p عددا أوليا قاسما للعدد c بحيث $2 < p$.

أ- بين أن : $a \wedge p = 1$.

ب- بين أن : $\exists k \in \mathbb{Z} \;/\; ka \equiv 1 \; [p]$.

جـ- استنتج أن : $\exists q \in \mathbb{Z} \;/\; q^4+1 \equiv 0 \; [p]$.

التمرين 9 :

1. حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة : $(E) \;:\; 3x - 2y = 1$

2. ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم.

أ- بين أن الزوج $(14n+3, 21n+4)$ حل للمعادلة (E).

ب- استنتج أن العددين $14n+3$ و $21n+4$ أوليان فيما بينهما.

3. ليكن d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين $2n+1$ و $21n+4$

أ- بين أن : $d = 1$ أو $d = 13$.

ب- بين أن : $d = 13 \Leftrightarrow n \equiv 6 \; [13]$.

4. من أجل كل عدد صحيح طبيعي n بحيث $n \geq 2$ ، نضع :

$$A = 21n^2 - 17n - 4 \text{ و } B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$$

أ- بين أن العددين A و B قابلان للقسمة على $n-1$ في $\mathbb{Z}$.

ب- حدد حسب قيم n ، القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .