التمرين 1 :

1. باستعمال خوارزمية أقليدس، حددالقاسم المشترك الأكبر للعددين 69 و 39 .
2. استنتج زوجا (u,v) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $69u+39v=d$ حيث d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 69 و 39 .
3. هل يمكن إيجاد عددين نسبيين x و y بحيث : $69x+39y=4$ ؟
4. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $69x+39y=3$.

التمرين 2 :

ليكن $(a,b)\in\mathbb{N}^{*2}$.

نضع : $d=a\wedge b$ و $a=da'$ و $b=db'$.

1. بين أن : $a'\wedge b'=1$.
2. حدد جميع الأزواج (a,b) من $\mathbb{N}^{*2}$ التي تحقق ما يلي :

$$\begin{cases} a\wedge b=9 \\ a+b=81 \end{cases}$$

التمرين 3 :

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$.

1. بين أن $2n^2+1$ و n أوليان فيما بينهما.
2. بين أن $2n^2+1$ و n^2+1 أوليان فيما بينهما.
3. بين أن الكسر $\dfrac{n^3+n}{2n^2+1}$ غير قابل للاختزال.

التمرين 4 :

1. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E_1)\ :\ 6x-5y=7$.

أ- ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E_1) . بين أن : $x\equiv 2\ [5]$.

ب-استنتج في $\mathbb{Z}^2$ ، مجموعة حلول المعادلة (E_1) .

2. **تطبيق :**

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ،

نعتبر المستقيم (Δ) ذو المعادلة $6x-5y=7$. حدد عدد النقط من المستقيم (Δ) ، ذات الإحداثيات الصحيحة الطبيعية ، والتي أفاصيلها أصغر من أو يساوي 500.

3. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E_2)\ :\ 6x^2-5y^2=7$.

أ- ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E_1) . بين أن : $x^2\equiv 2\ [5]$.

ب- بين أن لكل x من $\mathbb{Z}$ ، لدينا :
$x^2\equiv 0\ [5]$ أو $x^2\equiv 1\ [5]$ أو $x^2\equiv 4\ [5]$.

جـ- حدد مجموعة حلول المعادلة (E_2) .

التمرين 5 :

نذكر أن لكل $k\in\mathbb{N}^*$ ولكل $x\in\mathbb{R}$ ، لدينا :

$$(x-1)(1+x+\ldots+x^{k-1})=x^k-1$$

ليكن a عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 2، وليكن m و n عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين. نضع : $d=p\gcd(m,n)$ و $\Delta=p\gcd(a^m-1,a^n-1)$.

1. ليكن p قاسما موجبا للعدد n . بين أن a^p-1 يقسم a^n-1 .
2. استنتج أن a^d-1 يقسم Δ .
3. باستعمال مبرهنة $Bezout$ ، بين أنه يوجد زوج (u,v) من $\mathbb{N}^{*2}$ بحيث : $mu-nv=d$.
4. أ- تحقق من أن : $(a^{mu}-1)-(a^{nv}-1)a^d=a^d-1$.

ب- بين أن Δ يقسم a^d-1 .

جـ- ماذا تستنتج بالنسبة لـ Δ ؟

5. حدد $(3^{1905}-1)\wedge(3^{2005}-1)$.

التمرين 6 :

I. ليكن $n\in\mathbb{N}$. نفترض أن n عدد فردي غير أولي.

نضع : $N=a^2-b^2$ ، حيث $(a,b)\in\mathbb{N}^2$.

1. بين أن a و b مختلفي الزوجية.
2. بين أن N يكتب على شكل جداء عددين طبيعيين p و q .
3. ما هي زوجية العددين p و q ؟

II. نفترض أن 250507 عدد غير أولي . نعتبر في $\mathbb{N}^2$ المعادلة :

$$(E)\ :\ a^2-250507=b^2$$

1. ليكن X عددا صحيحا طبيعيا.

أ- أنشئ جدولا تحدد فيه بواقي القسمة الأقليدية للعدد X على 9 وبواقي القسمة الأقليدية للعدد X^2 على 9.

ب- علما أن $a^2-250507=b^2$ ، حدد بواقي القسمة الأقليدية للعدد $a^2-250507$ على 9، ثم استنتج بواقي القسمة الأقليدية للعدد a^2 على 9.

جـ- بين أن : $a\equiv 1\ [9]$ أو $a\equiv 8\ [9]$.

2. أ- بين انه إذا كان (a,b) حلا للمعادلة (E) ، فإن : $a\geq 501$.

ب- بين أن الأزواج $(501,b)$ ليست حلا للمعادلة (E) .

3. نفترض أن (a,b) حل للمعادلة (E) .

أ- بين أن : $a\equiv 503\ [9]$ أو $a\equiv 505\ [9]$.

ب- حدد أصغر عدد صحيح طبيعي k بحيث يكون الزوج

$(505+9k\,,b)$ حلا للمعادلة (E). حدد هذا الزوج.

III. 1. استنتج كتابة للعدد 250507 على شكل جداء عاملين.
2. هل هذين العاملين اوليين فيما بينهما ؟
3. هل هذه الكتابة وحيدة ؟

التمرين 7 :

مبرهنة فيرما : ليكن p عددا صحيحا طبيعيا أوليا، وليكن $a \in \mathbb{N}$ حيث $a \wedge p = 1$. لدينا : $a^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

1. ليكن p عددا صحيحا طبيعيا أوليا وفرديا.

أ- بين أن : $\exists k \in \mathbb{N} \ / \ 2^k \equiv 1\ [p]$.

ب- ليكن k عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم بحيث : $2^k \equiv 1\ [p]$ ، وليكن n عددا صحيحا طبيعيا.
بين أنه إذا كان k يقسم n ، فإن : $2^n \equiv 1\ [p]$.

جـ- ليكن b أصغر عدد صحيح طبيعي غير منعدم بحيث : $2^b \equiv 1\ [p]$. باستعمال القسمة الأقليدية للعدد n على b، بين أنه إذا كان $2^n \equiv 1\ [p]$ ، فإن b يقسم n .

2. ليكن q صحيحا طبيعيا أوليا وفرديا، وليكن $A = 2^q - 1$. ليكن p قاسما أوليا للعدد A.

أ- تحقق من أن : $2^q \equiv 1\ [p]$.

ب- بين أن p فردي.

جـ- ليكن b أصغر عدد صحيح طبيعي غير منعدم بحيث : $2^b \equiv 1\ [p]$. باستعمال ا ، بين أن b يقسم q. استنتج أن $b = q$.

د- بين أن q يقسم $p-1$ ، ثم أن $p \equiv 1\ [q]$.

3. ليكن $A_1 = 2^{17} - 1$. نعطي لائحة الأعداد الأولية الأصغر من أو يساوي 400 والتي تكتب على شكل $34m+1$ حيث $m \in \mathbb{N}^*$ كما يلي : $103\ ;\ 137\ ;\ 239\ ;\ 307$.
بين أن A_1 عدد أولي.

التمرين 8 :

نعتبر النظمة :
$$(S):\ x \in \mathbb{Z}\ ,\ \begin{cases} x \equiv 5[7] \\ x \equiv 1[4] \end{cases}$$

1. حل المعادلة : $(E)\ :\ (u,v) \in \mathbb{Z}^2\ ,\ 7u + 4v = 1$
2. ليكن (u_0,v_0) حلا للمعادلة (E) و $x_0 = 7u_0 + 20v_0$
بين أن العدد x_0 حل للنظمة (S) من أجل كل حل (u_0,v_0) للمعادلة (E).
3. حل النظمة :
$$x \in \mathbb{Z}\ :\ \begin{cases} x \equiv x_0[7] \\ x \equiv x_0[4] \end{cases}$$
4. استنتج حلول النظمة (S).

التمرين 9 :

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا.

1. بين أن n^2+5n+4 و n^2+3n+2 يقبلان القسمة على $n+1$.
2. حدد قيم n التي من أجلها يقبل العدد $3n^2+15n+19$ القسمة على $n+1$.
3. استنتج أنه مهما يكن n من $\mathbb{N}$ فإن $3n^2+15n+19$ لا يقبل القسمة على n^2+3n+2.

التمرين 10 :

نعتبر في $\mathbb{N}^{*2}$ المعادلة :
$$(E)\ :\ x^2(x^2+7) = y(2x+y)$$
ليكن (x,y) عنصرا من $\mathbb{N}^{*2}$ وليكن $d = x \wedge y$.
نضع : $x = da$ و $y = db$.

1. نفترض أن (x,y) حل للمعادلة (E) .

أ- تحقق أن : $a^2(d^2a^2+7) = b(2a+b)$.

ب- استنتج أنه يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث :
$d^2a^2+7 = kb$ و $2a+b = ka^2$

جـ- بين أن : $a = 1$.

د- استنتج أن : $(b+1)^2 = d^2+8$.

2. حل في $\mathbb{N}^{*2}$ المعادلة (E) .

التمرين 11 :

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .

1. أ- بين أن : n فردي $\Rightarrow n^2 \equiv 1\ [8]$.

ب- بين أن: $n^2 \equiv 0\ [8]$ أو $n^2 \equiv 4\ [8]$ $\Rightarrow n$ زوجي.

2. لتكن a و b و c أعداد صحيحة طبيعية فردية .

أ- بين أن : $a^2+b^2+c^2$ ليس مربعا كاملا (أي ليس مربعا لعدد صحيح) .

ب- بين أن : $2(ab+bc+ca) \equiv 6\ [8]$. لاحظ أن :
$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

جـ- استنتج أن $2(ab+bc+ca)$ ليس مربعا كاملا .

د- بين أن $ab+bc+ca$ ليس مربعا كاملا .

التمرين 12 :

نعتبر ثلاثة أعداد صحيحة طبيعية a و b و c بحيث كتابتها في نظمة العد ذات الأساس x هي : $a = \overline{13054}^{(x)}$
و $b = \overline{114}^{(x)}$ و $c = \overline{111}^{(x)}$. نفترض أن : $a = bc$.

1. حدد x، وكتابة كل من a و b و c في نظمة العد العشري .
2. أحسب $b \wedge c$.