

الحسابيات

I- قابلية القسمة في \mathbb{Z}

1- تعريف

ليكن a و b من \mathbb{Z} نقول إن b يقسم a إذا وجد k في \mathbb{Z} حيث $a = kb$

$$(a; b) \in \mathbb{Z}^2 \quad b/a \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad a = kb$$

2- ملاحظات

- إذا كان b يقسم a إثنا نقول إن b قاسم لـ a أو a مضاعف لـ b
- ليكن $b \in \mathbb{Z}$ مجموعة مضاعفات العدد b هي المجموعة $b \cdot \mathbb{Z} = \{k \cdot b / k \in \mathbb{Z}\}$

$$b/a \Rightarrow |b| \leq |a| \quad : \quad b \in \mathbb{Z} \quad a \in \mathbb{Z}^*$$

3- خصائص العلاقة " b/a "

نقول إن العلاقة " b/a " انعكاسية $\forall a \in \mathbb{Z} \quad b/a \rightarrow a/b$

$$\forall (a; b; c) \in \mathbb{Z}^3 \quad \begin{cases} b/a \\ a/c \end{cases} \Rightarrow b/c \quad *$$

$$\forall (a; b; c) \in \mathbb{Z}^3 \quad \begin{cases} b/a \\ a/b \end{cases} \Rightarrow |a| = |b| \quad *$$

ملاحظة

نقول إن العلاقة " b/a " تبالية في \mathbb{N} $\forall (a; b; c) \in \mathbb{N}^3 \quad \begin{cases} b/a \\ a/b \end{cases} \Rightarrow a = b$

تمرين

- بين أن $\forall (a; b) \in \mathbb{Z}^2 \quad b/a \Leftrightarrow a \cdot \mathbb{Z} \subset b \cdot \mathbb{Z}$
- بين أن $\forall (a; x_1; x_2; y_1; y_2) \in \mathbb{Z}^5 \quad a/(x_1 - y_1) \wedge a/(x_2 - y_2) \Leftrightarrow a/(x_1 x_2 - y_1 y_2)$

II- القسمة الأقلية في \mathbb{Z}

1- القسمة الأقلية في \mathbb{N}

مبرهنة

ليكن a و b من \mathbb{N} حيث $a \neq b$ يوجد زوج وحيد $(q; r)$ من \mathbb{N}^2 حيث $a = bq + r$

اصطلاحات

العملية التي تمكنا من تحديد $(q; r)$ بحيث $a = bq + r$ حيث $0 \leq r < b$ تسمى القسمة الأقلية لـ a على b في \mathbb{N}

العدد a يسمى المقسم و العدد b يسمى المقسم عليه و العدد q الخارج و r الباقي.

2- القسمة الأقلية في \mathbb{Z}

مبرهنة

ليكن a من \mathbb{Z} و b في \mathbb{N}^* حيث $a \neq b$ يوجد زوج وحيد $(q; r)$ من $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ حيث $a = bq + r$

اصطلاحات

العملية التي تمكنا من تحديد $(q; r)$ من $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ بحيث $a = bq + r$ حيث $0 \leq r < b$ تسمى

القسمة الأقلية لـ a على b في \mathbb{Z}

العدد a يسمى المقسم و العدد b يسمى المقسم عليه و العدد q الخارج و r الباقي

حدد الأعداد الصحيحة النسبية x بحيث يكون للقسمة الأقلية لـ x على 7 خارج q و باقي q^2

بين إذا كان للقسمة الأقلية لـ a على b والقسمة الأقلية لـ a' على b نفس الخارج q و كان $b \prec a \prec a'$ فان q خارج القسمة الأقلية لـ x على b

III- الموافقة بتردد n

1- تعريف

ليكن a و b من \mathbb{Z} و n من \mathbb{N}

نقول إن $a \equiv b \pmod{n}$ إذا كان n يقسم $a - b$

$$\forall (a; b) \in \mathbb{Z}^2 \quad a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow n | a - b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad a - b = kn$$

2- خصيات العلاقة " الموافقة بتردد n "

أ- $\forall a \in \mathbb{Z} \quad a \equiv a \pmod{n}$

ب- $\forall (a; b) \in \mathbb{Z} \quad a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow b \equiv a \pmod{n}$

ج- $\forall (a; b) \in \mathbb{Z} \quad (a \equiv b \pmod{n}) \text{et} (b \equiv c \pmod{n}) \Rightarrow a \equiv c \pmod{n}$

متعددة

تلخيص الخصيات أ و ب و ج بقولنا إن العلاقة " الموافقة بتردد n " علاقة تكافؤ

د- خاصية

ليكن a و b من \mathbb{Z} و n من \mathbb{N}

$a \equiv b \pmod{n}$ تكافئ a و b لهما نفس باقي القسمة الأقلية على n

البرهان

ليكن a و b من \mathbb{Z} و n من \mathbb{N} بحيث $0 \leq r_1 \prec n$ و $0 \leq r_2 \prec n$ مع $b = nq_2 + r_2$ و $a = nq_1 + r_1$

إذا كان a و b لهما نفس باقي القسمة الأقلية على n أي $r_1 = r_2$ فان $a - b = n(q_1 - q_2)$

أي $a \equiv b \pmod{n}$

عكسيا إذا كان $a \equiv b \pmod{n}$ فإنه يوجد $k \in \mathbb{Z}$ حيث $a - b = nk$

و منه $r_1 - r_2 = (k - q_1 - q_2)n$ أي n يقسم $r_1 - r_2$

ولدينا $0 \leq r_1 \prec n$ و $0 \leq r_2 \prec n$ ومنه $|r_1 - r_2| < n$

وبالتالي $r_1 = r_2$ أي $r_1 - r_2 = 0$

3- المجموعة $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$\forall (a; n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad \exists (q; r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad a = nq + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r \prec n$ - *

$\forall (a; n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad \exists r \in \mathbb{N} \quad a \equiv r \pmod{n} \quad \text{et} \quad r \in \{0; 1; \dots; n-1\}$ -

- المجموعة $\{x \in \mathbb{Z} / x \equiv r \pmod{n}\}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية التي لها نفس الباقي r

في القسمة الأقلية على n نرمز لها بـ \bar{r}

المجموعة \bar{r} تسمى صنف تكافؤ r بالنسبة للعلاقة " الموافقة بتردد n " في \mathbb{Z}

$x \in \bar{r} \Leftrightarrow x \equiv r \pmod{n}$ -

$\forall a \in \mathbb{Z} \quad \exists r \in \{0; 1; \dots; n-1\} / \quad \bar{a} \equiv \bar{r} \quad \text{أي} \quad \forall a \in \mathbb{Z} \quad \exists r \in \{0; 1; \dots; n-1\} / \quad a \equiv r \pmod{n}$ - *

- إذا كان $\bar{r}' = \bar{r}$ و $0 \leq r' \prec n$ و $0 \leq r \prec n$ فان $r = r'$

() r باقي القسمة الأقلية على n $\forall (x; n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad \exists r \in \{0; 1; \dots; n-1\} / \quad x \in \bar{r}$ - *

اذن $\mathbb{Z} = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2} \cup \dots \cup \overline{(n-1)}$

المجموعة $\{\overline{0}; \overline{1}; \dots; \overline{n-1}\}$ برمز لها بالرمز

عناصر $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ منفصلة مثنى مثنى

أمثلة

$$\bar{1} = \{x \in \mathbb{Z} / x = 2k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z})\} \quad \text{و} \quad \bar{0} = 2 \cdot \mathbb{Z} \quad \text{حيث} \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\} *$$

$$\bar{1} = \{x \in \mathbb{Z} / x = 7k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z})\} \quad \text{و} \quad \bar{0} = 7 \cdot \mathbb{Z} \quad \text{حيث} \quad \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\} *$$

$$\bar{3} = \{x \in \mathbb{Z} / x = 7k + 3 \quad (k \in \mathbb{Z})\} \quad \text{و} \quad \bar{2} = \{x \in \mathbb{Z} / x = 7k + 2 \quad (k \in \mathbb{Z})\} \quad \text{و}$$

$$\bar{6} = \{x \in \mathbb{Z} / x = 7k + 6 \quad (k \in \mathbb{Z})\} \quad \text{و} \dots \dots \dots$$

$$532 \equiv 4 \quad \text{لدينا} \quad \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{\bar{4}\} [7] *$$

$$-36 \equiv 6 \quad \text{لأن} [7] \quad \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{\bar{6}\}$$

- انسجام العلاقة " الموافقة بتردد n " مع الجمع والضرب

أ- خاصية

ليكن x و y و z و t من \mathbb{Z} و n من \mathbb{N}

$$\text{إذا كان } x + z \equiv y + t \quad [n] \quad \text{فإن} \quad z \equiv t \quad [n] \quad x \equiv y \quad [n]$$

$$\text{إذا كان } x \times z \equiv y \times t \quad [n] \quad \text{فإن} \quad z \equiv t \quad [n] \quad x \equiv y \quad [n]$$

نقول إن العلاقة " الموافقة بتردد n " منسجمة مع الجمع والضرب

ب- نتائج

$$\overline{r+r'} = \overline{r} + \overline{r'} \quad \text{نكتب} \quad x \times x' \in \overline{r \times r'} \quad \text{فإن} \quad x + x' \in \overline{r+r'} \quad x' \in \overline{r'} \quad x \in \overline{r} \quad \text{و} \quad \overline{r \times r'} = \overline{r} \times \overline{r'} \quad \text{إذا كانت} \quad \overline{r+r'} = \overline{r} + \overline{r'} \quad -*$$

$$\forall (a;b) \in \mathbb{Z}^2 \quad \forall (p;n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \quad a \equiv b \quad [n] \Rightarrow a^p \equiv b^p \quad [n] \quad -*$$

أمثلة

$$\overline{3} \times \overline{4} = \overline{12} = \overline{2} \quad , \quad \overline{0} + \overline{1} + \overline{2} + \overline{3} + \overline{4} = \overline{10} = \overline{0} \quad , \quad \overline{3} + \overline{4} = \overline{7} = \overline{2} \quad \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} * \quad \text{في}$$

تمرين

حدد مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية x حيث في $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

تمرين

- أعط جدول الجمع ثم الضرب في $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

- بين أن العدد $2^{70} + 3^{70}$ قابلة للقسمة على 13

تمرين

- بين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad n(n^4 - 1) \equiv 0 \quad [n]$

- بين أن 17 يقسم $\mathbb{N}^* \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ لـ n من كل

-3 ليكن n من \mathbb{N} ، حدد بوافي القسمة الأقلية للأعداد $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ على 4

IV- القاسم المشترك الأكبر

نرمز لمجموعة قواسم العدد الصحيح النسيبي a بالرمز D_a

- تعريف

ليكن a و b من \mathbb{Z}^*
القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو أكبر قاسم مشترك موجب قطعاً لـ a و b يرمز له $a \wedge b$

$$\delta = a \wedge b \Leftrightarrow \begin{cases} \delta \in D_a \cap D_b \\ \forall x \in D_a \cap D_b \quad x \leq \delta \end{cases}$$

ليكن a و b و c من \mathbb{Z}^*

$$a \wedge b = b \wedge a$$

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

$$a \wedge a = |a|$$

مثال $48 \wedge 60 = 12$

3- خوارزمية أقليدس أو طريقة "القسمات المتتالية" لتحديد القاسم المشترك
أ- ملاحظة

$$\forall a \in \mathbb{Z}^* \quad D_a = D_{-a} \quad *$$

$\forall (a; b) \in \mathbb{Z}^{*2}$ $a \wedge b = |a| \wedge |b|$ *
ومنه تحديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين نسبيين.
يرجع إلى تحديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين طبيعيين.

ب- ليكن a و b من \mathbb{N}^*

- إذا كان b/a فان

- إذا كان b لا يقسم a فانه يوجد زوج وحيد $(q; r)$ من $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ حيث $a = bq + r$ و

بما أن $r = a - bq$ فان كل قاسم مشترك ل a و b يقسم r

$D_a \cap D_b \subset D_r \cap D_b$ و b هو قاسم مشترك ل a و r أي

عكسيا كل قاسم مشترك ل b و r يقسم a (لأن $a = bq + r$)

ومنه كل قاسم مشترك ل b و r هو قاسم مشترك ل a و b أي

$a \wedge b = r \wedge b$ إذن $D_a \cap D_b = D_r \cap D_b$ وبالتالي

تمهيدة

ليكن a و b من \mathbb{N}^* بحيث b لا يقسم a و r باقي القسمة الأقلية ل a على b

$$a \wedge b = r \wedge b$$

ج- ليكن a و b من \mathbb{N}^* نفترض أن $b \nmid a$

بإجراء القسمة الأقلية ل a على b نحصل على r_1 حيث $b \mid r_1$ حيث $a = bq_1 + r_1$

❖ إذا كان $r_1 = 0$ فان b/a و منه $a \wedge b = b$

❖ اذا كان $0 < r_1$ نجري القسمة الأقلية ل b على r_1 و نحصل على r_2 و

اذا كان $0 \leq r_2 < r_1$ فان $b \wedge r_1 = r_1$ و منه $b \wedge r_1 = r_1$

إذا كان $0 < r_2 \leq r_1$ نجري القسمة الأقلية ل r_1 على r_2 و نحصل على r_3 و

.....
بإجراء العملية n مرة نحصل على

$$a \wedge b = b \wedge r_1 , \quad 0 < r_1 < b , \quad a = bq_1 + r_1$$

$$b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2 , \quad 0 < r_2 < r_1 , \quad b = r_1 q_2 + r_2$$

$$r_1 \wedge r_2 = r_2 \wedge r_3 , \quad 0 < r_3 < r_2 , \quad r_1 = r_2 q_3 + r_3$$

.

.

.

.

.

.

.

$$r_{n-2} \wedge r_{n-1} = r_{n-1} \wedge r_n , \quad 0 < r_n < r_{n-1} , \quad r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n$$

و منه نستنتج $a \wedge b = b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2 = r_2 \wedge r_3 = \dots = r_{n-2} \wedge r_{n-1} = r_{n-1} \wedge r_n$

$0 < r_n < r_{n-1} < r_3 < r_2 < r_1 < b$

نضع $A = \{r_1; r_2; r_3; \dots; r_n; \dots\}$

جزء من \mathbb{N} مكبور بالعدد b و منه A مجموعة متihية

$\exists p \in \mathbb{N} / \quad r_{p+1} = 0 \quad ; \quad r_p \neq 0$ إذن

$$\text{بما أن } r_{p-1} \wedge r_p = r_b \text{ فـ } r_{p+1} = r_p q_{p+1} \text{ و منه } a \wedge b = r_p$$

نتيجة

ليكن a و b من \mathbb{N}^*
القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو اخر باقي غير منعدم في طريقة القسمات المتتالية لـ a
على b

مثال باستعمال طريقة القسمات المتتالية، نحدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 1640 و 156

$$1640 = 156 \times 10 + 80$$

$$156 = 80 \times 1 + 76$$

$$80 = 76 \times 1 + 4$$

$$76 = 4 \times 19 + 0$$

$$1640 \wedge 156 = 4 \quad \text{إذن}$$

- خاصيات

أ- مبرهنة

ليكن a و b من \mathbb{Z}^* و
 $\delta = au + bv$ يوجد عددان u و v من \mathbb{Z} حيث

البرهان

ليكن a و b من \mathbb{Z}^* و

$A = \{n \in \mathbb{N}^* / n = au + bv ; (u;v) \in \mathbb{Z}^2\}$ نعتبر

لدينا $a^2 + b^2 \in A$ لأن $A \neq \emptyset$

$\exists p \in A \quad \forall x \in A \quad x \geq p \quad A \subset \mathbb{N}$

ليكن $p = au_0 + bv_0$ نبرهن أن $\delta = p$

❖ بما أن δ/a و δ/b فإن δ/p و منه

❖ بإنجاز القسمة لـ a على p نحصل على $a = pq + r$; $0 \leq r < p$

❖ ومنه $r = a - q(au_0 + bv_0) = a(1 - qu_0) + b(-qv_0)$

إذا كان $0 < r \in A$ و منه $r \geq p$ وهذا يتناقض مع كون $r < p$

و بالتالي $r = 0$ أي p/a وبنفس الطريقة نبرهن أن p/b

و منه p قاسم مشترك لـ a و b وبالتالي $\delta \geq p$

لدينا $\delta \geq p$ و إذن $\delta \leq p$

ب- استنتاجات

* من البرهان السابق نستنتج $\delta = a \wedge b$ هو أصغر عدد موجب قطعاً من المجموعة

$B = \{n \in \mathbb{Z}^* / n = au + bv ; (u;v) \in \mathbb{Z}^2\}$

* بما أن δ قاسم مشترك لـ a و b فإن أي قاسم لـ δ يقسم a و b

عكسياً اذا كان c قاسم مشترك لـ a و b فإن $a = k_1 c$; $b = k_2 c$

بما أن $\delta = au + bv$ فإنه $\delta = a \wedge b$

و منه $\delta = (k_1 u + k_2 v)c$ أي c يقسم δ

مبرهنة

ليكن a و b من \mathbb{Z}^* و

$(D_a \cap D_b = D_\delta)$ مجموعه قواسم δ هي مجموعه القواسم المشتركة لـ a و b

نتيجة

إذا كان a و b و c أعداد من \mathbb{Z} فإن

$$a \wedge b = \delta \Rightarrow ca \wedge cb = |c|\delta$$

\mathbb{Z}^* أعداد من a_1 و a_2 و و a_k

أكبر عدد صحيح طبيعي يقسم في آن واحد a_1 و a_2 و و a_k يسمى القاسم المشترك الأكبر لـ a_1 و و a_k

مثال $12 \wedge -18 \wedge 15 = 3$

نتيجة

إذا كان δ هو القاسم المشترك الأكبر لـ a_1 و a_2 و و a_k فإنه توجد اعداد α_1 و α_2 و و α_k من \mathbb{Z} حيث

$$\sum_{i=1}^{i=k} \alpha_i a_i = \delta$$

-V- الأعداد الأولية فيما سبق

تعريف 1

ليكن a و b من \mathbb{Z}^* نقول a و b أوليان فيما بينهما إذا كان $a \wedge b = 1$

-2- مبرهنة Bezout

ليكن a و b من \mathbb{Z}^*

$$\exists (u; v) \in \mathbb{Z}^2 / au + bv = 1 \quad \text{إذا كان } a \wedge b = 1 \quad \text{فانه } a \wedge b = 1$$

عكسيا: ليكن a و b من \mathbb{Z}^* حيث $au + bv = 1$

ومنه كل قاسم مشترك لـ a و b يقسم 1 وبالتالي $D_a \cap D_b = \{-1; 1\}$ أي $a \wedge b = 1$

-3- مبرهنة Bezout

ليكن a و b من \mathbb{Z}^*

$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \exists (u; v) \in \mathbb{Z}^2 / au + bv = 1$$

-3- نتائج

ليكن a و b من \mathbb{Z}^* و d قاسم مشترك لـ a و b

$$a \wedge b = d \Leftrightarrow \frac{a}{|d|} \wedge \frac{b}{|d|} = 1$$

ملاحظة

إذا كان a و b من \mathbb{Z}^* و δ قاسم مشترك لـ a و b

$$p \wedge q = 1 ; a = \delta p ; b = \delta q$$

-4- مبرهنة كوص Théorème de GAUSS

أ- مبرهنة

ليكن a و b و c من \mathbb{Z}^*

إذا كان c يقسم الجداء ab و كان $a \wedge c = 1$ فإن c يقسم b

البرهان

ليكن a و b و c من \mathbb{Z}^* حيث $c | ab$ و $c | a$

$$\exists (u; v; k) \in \mathbb{Z}^3 / au + cv = 1 ; ab = kc$$

ومنه $b = b \times 1 = b(au + cv) = bau + bcv = ku + bv$ وبالتالي $b | (ku + bv)$

اذن c يقسم b

ب- استنتاجات

- مبرهنة a

ليكن a و b و c من \mathbb{Z}^*

$$a \wedge b = 1 \text{ et } a | c \text{ et } b | c \Rightarrow ab | c$$

الشرط $a \wedge b = 1$ ضروري

مثال 36 يقبل القسمة على 4 و 6 ، ولا يقبل القسمة على $24 = 4 \times 6$

b- مبرهنة

ليكن a و b و c من \mathbb{N}^* و n من \mathbb{Z}^*

$$\left\{ \begin{array}{l} ab \equiv ac \pmod{n} \\ a \wedge n = 1 \end{array} \right. \Rightarrow b \equiv c \pmod{n}$$

البرهان

$$ab \equiv ac \pmod{n} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad ab - ac = kn$$

$$\Leftrightarrow n/a(b - c)$$

و حيث أن $a \wedge n = 1$ إذن $n/(b - c)$ فان

5- خصائص

$$\left\{ \begin{array}{l} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow a \wedge bc = 1 \quad \text{ليكن } a \text{ و } b \text{ و } c \text{ من } \mathbb{Z}^*$$

$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a \wedge b^n = 1 \quad \text{ليكن } a \text{ و } b \text{ من } \mathbb{Z}^* \text{ و } n \text{ من } \mathbb{N}^*$$

$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a^m \wedge b^n = 1 \quad \text{ليكن } a \text{ و } b \text{ من } \mathbb{Z}^* \text{ و } m \text{ و } n \text{ من } \mathbb{N}^*$$

نتيجة

ليكن a و b من \mathbb{Z}^*
 $\forall x \in \mathbb{Z} \quad \exists (u; v) \in \mathbb{Z}^2 \quad x = au + bv$ فان $a \wedge b = 1$ إذا كان

تمرين محلول

تمرين حدد الأعداد الصحيحة النسبية حيث $17x + 3y = 94$

الحل

الطريقة 1

لدينا $17(x - 2) + 3(y - 20) = 0$ و $17x + 3y = 94$ ومنه $17 \times 2 + 3 \times 20 = 94$

$$-17(x - 2) = 3(y - 20)$$

أي $3/17(x - 2) = y - 20$ ومنه $3/17(x - 2) = 1$ أي $17 \wedge 3 = 1$ فان

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad x = 3k + 2$$

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad y = -17k + 20 \quad \text{و بالتالي} \quad 17(3k + 2) + 3y = 94$$

$$S = \{(3k + 2; -17k + 20) / k \in \mathbb{Z}\}$$

الطريقة 2

$$17x + 3y = 94 \Leftrightarrow 17x - 94 = 3y$$

$$\Leftrightarrow 17x \equiv 94 \pmod{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\Leftrightarrow -x \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\Leftrightarrow -x \equiv -(-1) \pmod{3}$$

بما أن $-1 \wedge 3 = 1$ فان $x = -1 \pmod{3}$ ومنه

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad y = 17k + 37$$

$$S = \{(3k - 1; 17k + 37) / k \in \mathbb{Z}\}$$

تمرين

حدد الأعداد q و u_0 من المجموعة \mathbb{N}^* بحيث $u_0 \wedge q = 1$ والأعداد u_0 و u_1 و u_2 و u_3 حدود المتتالية الهندسية التي أساسها q و تتحقق $u_1 + 2u_3 = 44u_0^2$

تمرين

بين إذا كان $a \wedge b = 1$ فإن $(a+b) \wedge ab = 1$ و $(a+b) \wedge b = 1$

استنتج أن $\frac{2n+3}{n^2+3n+2}$ غير قابلة للاختزال

تمرين

بين أن العدد $\sqrt{\frac{2}{3}}$ عدد لا جدرى

6- الأعداد الأولية فيما بينها في مجموعها

تعريف

نقول إن الأعداد a_1 و a_2 و a_3 و و a_n من \mathbb{Z}^* أولية فيما بينها في مجموعها إذا كان القاسم المشترك الأكبر لهذه الأعداد هو 1

ملاحظة

عندما نقول إن الأعداد a_1 و a_2 و a_3 و و a_n من \mathbb{Z}^* أولية فيما بينها في مجموعها هذا لا يعني أولية فيما بينها مثنى مثنى

مبرهنة

نقول إن الأعداد a_1 و a_2 و a_3 و و a_n من \mathbb{Z}^* أولية فيما بينها في مجموعها إذا وفقط وجدت أعداد

$$\sum_{i=1}^n u_i a_i = 1 \quad \text{حيث } u_1 \text{ و } u_2 \text{ و } u_3 \text{ و و } u_n \text{ من } \mathbb{Z}^*$$

حل المعادلة $(x; y) \in \mathbb{Z}^2 \quad ax + by = c$

أ- مثال

$$1075x + 64y = 9 \quad \mathbb{Z}^2$$

نطبق خوارزمية أقليدس لتحديد

$$1075 = 64 \times 16 + 51$$

$$64 = 51 \times 1 + 13$$

$$51 = 13 \times 3 + 12$$

$$13 = 12 \times 1 + 1$$

$$12 = 12 \times 1 + 0$$

$$\text{ومنه } 1075 \wedge 64 = 1$$

ومنه يوجد $(x; y)$ من \mathbb{Z}^2 حيث

$$b = 64 \quad a = 1075$$

لوضع من خوارزمية أقليدس نستنتج أن

$$51 = a - 16b$$

$$13 = b - (a - 16b)$$

$$12 = a - 16b - 3(b - (a - 16b))$$

$$1 = b - (a - 16b) - (a - 16b - 3(b - (a - 16b)))$$

$$1 = -5a + 84b$$

$$\text{و منه } 9 = -45a + 756b \quad \text{أي } 9 = -45 \times 1075 + 756 \times 64$$

$$\text{و منه } 1075(x + 45) + 64(y - 756) = 0 \quad \text{ حل للمعادلة } 1075x + 64y = 9 \quad \text{ و بالتالي } 0$$

$$64/(x + 45) = 1075 \wedge 64 \quad \text{و حيث أن } 64/1075(x + 45)$$

هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

$\exists k \in \mathbb{Z}$ $y = 1075k + 756$ و منه $\exists k \in \mathbb{Z}$ $x = 64k - 45$ اي $\exists k \in \mathbb{Z}$ $x + 45 = 64k$ إذن $1075x + 64y = 9$ فانهما يحققان المعادلة $y = 1075k + 756$; $x = 64k - 45$ عكسيا إذا كان $S = \{(64k - 45; 1075k + 756) / k \in \mathbb{Z}\}$ إذن

ب - الحالة العامة

نعتبر المعادلة $b \neq 0$ و $a \neq 0$ حيث (E) $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ $ax + by = c$ نضع $\delta(a'; b') \in \mathbb{Z}^{*2}$ / $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$ $a' \wedge b' = 1$ $\delta = a \wedge b$ ومنه $c = \delta c'$ فإذا كان δ/c فإن المعادلة تصبح $a'x + b'y = c'$ بوضع $a'x + b'y = c$ بما أن $a' \wedge b' = 1$ فإنه يوجد $(u_0; v_0) \in \mathbb{Z}^2$ من $a'u_0 + b'v_0 = c'$ أي المعادلة $ax_0 + by_0 = c$ لیکن $(x_0; y_0) \in \mathbb{Z}^2$ حل للمعادلة $ax + by = c$ في δ/c إذن $\delta(a'x_0 + b'y_0) = c$ ومنه

خاصية

ليکن $(a; b) \in \mathbb{Z}^2$ من $\delta = a \wedge b$

للمعادلة $ax + by = c$ حلول في \mathbb{Z}^2 إذا وفقط إذا كان

حل المعادلة $ax + by = c$

لنفترض أن δ/c إذن حل المعادلة يرجع إلى حل المعادلة $a'x + b'y = c'$

بما أن $a'c'u_0 + b'c'v_0 = c'$ أي $a'x + b'y = 1$ حيث $(u_0; v_0) \in \mathbb{Z}^2$ فإنه يوجد

$a'(x - c'u_0) = -b'(y - c'v_0)$ وبالتالي $a'(x - c'u_0) + b'(y - c'v_0) = 0$ ومنه

$a'/(c'v_0 - y) = a' \wedge b'$ و حيث أن $a' \wedge b' = 1$ فإن

$x = kb' + c'u_0$ حيث $y = -a'k + c'v_0$ ومنه نستنتج أن

$a'x + b'y = c'$ هو حل للمعادلة $(kb' + c'u_0; -a'k + c'v_0) \in \mathbb{Z}^2$ إذن

$\{(kb' + c'u_0; -a'k + c'v_0) / k \in \mathbb{Z}\}$ إذن

تمرين

حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة $7x - 3y = 1$

ليکن a من \mathbb{N} بحيث باقي القسمة الأقلية a على 7 و 3 على التوالي 1 و 2

حدد باقي القسمة الأقلية a على 35

VI- المضاعف المشترك الأصغر

1- تعريف

ليکن $(a; b) \in \mathbb{Z}^{*2}$

المضاعف المشترك الأصغر a و b هو أصغر مضاعف مشترك موجب لـ a و b نرمز له بـ $a \vee b$

2- خصائص

أ - ليکن a و b و c من \mathbb{Z}^{*} $a \vee b = b \vee a$

$(a \vee b)|c| = ac \vee bc$

$a \wedge a = |a|$

$b/a \Leftrightarrow a \vee b = |a|$

ب - ليکن a و b من \mathbb{Z}^{*} كل مضاعف مشترك لـ a و b هو مضاعف للعدد m

ج- مبرهنة

ليکن a و b من \mathbb{Z}^{*} و $\delta = a \wedge b$ $m \delta = |ab|$

ليكن a و b من \mathbb{Z}^*
 $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a \vee b = |ab|$

3- المضاعف المشترك لعدة أعداد

تعريف

أصغر مضاعف مشترك موجب للأعداد a_1 و a_2 و a_3 و و a_k يسمى المضاعف المشترك الأصغر له a_1 و a_2 و a_3 و و a_k و $a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge \dots \wedge a_k$ أعداد من \mathbb{Z}^*

4- الأعداد الأولية VII

تعريف

أ- القواسم الفعلية لعدد صحيح نسبي

تعريف

ليكن $a \in \mathbb{Z}$
 نقول إن العدد d قاسم فعلي للعدد a إذا و فقط إذا كان d يقسم a و $d \notin \{-1; 1; -a; a\}$

أمثلة

- القواسم الفعلية للعدد 6 هي 2 و -2 و 3 و -3

- لدينا $D_7 = \{1; -1; 7; -7\}$ العدد 7 لا يقبل قواسم فعلية

ب- الأعداد الأولية

تعريف

ليكن $a \in \mathbb{Z}$
 نقول إن العدد a أولي إذا و فقط إذا كان a يخالف 1 و -1 و ليس له قواسم فعلية
 $|a| \neq 1 \Leftrightarrow D_a = \{1; -1; a; -a\}$

نرمز لمجموعة الأعداد الأولية بـ P

2- خصائص

- أ- إذا كان p و q عددين أوليين و $|q| \neq |p|$ فإنهمما أوليين فيما بينهما (العكس غير صحيح)
- ب- إذا كان p أولي فإنه أولي مع أي عدد a من \mathbb{Z} بحيث p لا يقسم a
- ج- ليكن a عددا غير أولي في \mathbb{Z}^* ويختلف 1 و -1 .
أصغر قاسم فعلي موجب للعدد a هو عدد أولي
- د- مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية

البرهان

نبرهن أن مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية

لتكن P^+ مجموعة الأعداد الأولية الموجبة

$2 \in P^+ \text{ لأن } P^+ \neq \emptyset$

لفترض أن P^+ منتهية و ليكن p أكبر عنصر من P^+ . لعتبر $m = p! + 1$ لدينا $m > p$ و منه $m \notin P^+$ أي m ليس أوليا و وبالتالي للعدد m قاسم أولي q ومنه $q \leq p$ يستلزم q يقسم $p!$ لأن $(p! + 1) \mod q = 1$ وهذا يتناقض مع كون q أولي

و منه P^+ غير منتهية إذن P غير منتهية

3- طريقة عملية لتحديد الأعداد الأولية

برهنة

ليكن $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$

إذا كان n غير أولي فإنه يوجد عدد أولي موجب p يقسم n و $p^2 \leq n$

البرهان

ليكن $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$ و n غير أولي و ليكن p أصغر قاسم فعلي موجب لـ n إذن p أولي ومنه يوجد

$n = pk$ حيث $k \in \mathbb{N}^*$

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

بما أن $n \leq k$ فان $p = n$ إذن $k \leq kp = n$ قاسم فعلى موجب للعدد n وبالتالي $p^2 \leq pk = n$ إذن ملاحظة

- لتأكد من أن n هل أولي أم لا. نرى هل يقبل القسمة على أحد الأعداد الأولية p حيث $n \leq p^2$
- فإذا كان يقبل القسمة على أحدهم فان n غير أولي
- وإذا كان لا يقبل القسمة على أي واحد منها فان n عدد أولي

(عملياً تتوقف عندما تكون $n > p^2$)

مثال العدد 179 لا يقبل القسمة على أي عدد من الأعداد الأولية التالية 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13

$$17^2 = 289 ; 13^2 = 169$$

4- خصائص خاصية

*- إذا كان عدد أولي يقسم جداء أعداد صحيحة نسبية فانه يقسم أحد عوامل هذا الجداء

البرهان

ليكن p عدداً أولياً و $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n = a$ جداء n من الأعداد الصحيحة النسبية $\exists i \in \{1, 2, \dots, n\} / p/a_i$

نفترض أن p/a نبين $p/a_1 \times a_2 \dots \times a_n$. إذا كان p/a_1 فان ذلك هو المطلوب

p/a_2 إذا كان p/a_2 لا يقسم $a_1 \wedge p = 1$ وحيث $p/a_1 \times a_2$ فان حسب GAUSS

لنفترض أن الخاصية صحيحة بالنسبة لـ n لنبره صحتها بالنسبة لـ $n+1$ لينكن $b = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n \times a_{n+1}$ بحيث

إذا كان p/b فان ذلك هو المطلوب

$p/a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$ إذا كان $p/a_{n+1} \wedge p = 1$ وحيث p/b فان حسب GAUSS ومنه

$$\exists i \in \{1, 2, \dots, n\} / p/a_i$$

نتيجة

لتكن $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n$ أعداد أولية موجبة و p عدداً أولياً

$$p/p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n \Rightarrow \exists i \in \{1, 2, \dots, n\} / p = p_i$$

5- التفكيك إلى جداء من عوامل أولية

1- مبرهنة

كل عدد صحيح نسبي n غير منعدم ومخالف لـ 1 يمكن كتابته بكيفية وحيدة على شكل

$$n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k} \quad \text{حيث } p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \text{ أعداد أولية مختلفة مثنى مثنى و } \varepsilon = \pm 1 \quad \text{و } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

ملاحظة عندما نكتب n على شكل $n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$ فإننا نقول اننا فكينا n إلى جداء

عوامل أولية

مثال فك العدد 1752 إلى جداء عوامل أولية

2- تطبيقات

1- نتيجة (A)

ليكن $n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$ أعداد أولية حيث $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n$

يكون عدد d قاسماً للعدد n اذا وفقط اذا كان تفكيك d إلى عوامل جداء أولية على شكل

$$d = \varepsilon p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \dots \times p_k^{\beta_k}$$

حيث $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ لكل i من $\{1, 2, \dots, k\}$

نتيجة 2

ليكن $n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$ أعداد أولية حيث $p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n$

يكون عدد m مضاعفاً للعدد n إذا وفقط إذا كان تفكيك m إلى عوامل جداء أولية على شكل

هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

$$d = \varepsilon p_1^{\lambda_1} \times p_2^{\lambda_2} \times \dots \times p_k^{\lambda_k}$$

حيث $0 \leq \alpha_i \leq \lambda_i$ لـ i من $\{1; 2; \dots; k\}$

(B) القاسم المشترك الأكبر - المضاعف المشترك الأصغر
+ القاسم المشترك الأكبر
نتيجة

ليكن a و b من \mathbb{Z}^* حيث b أعداد أولية
وحيث p_1, p_2, \dots, p_n أعداد أولية

$\delta = p_1^{\lambda_1} \times p_2^{\lambda_2} \times \dots \times p_k^{\lambda_k}$ هو العدد a و b هما
القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b حيث $\lambda_i = \inf(\alpha_i; \beta_i)$ و i تتنمي $\{1; 2; \dots; k\}$

+ المضاعف المشترك الأصغر
نتيجة

ليكن a و b من \mathbb{Z}^* حيث $a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$ وحيث p_1, p_2, \dots, p_n أعداد أولية

$m = p_1^{\lambda_1} \times p_2^{\lambda_2} \times \dots \times p_k^{\lambda_k}$ هو العدد a و b هما
المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b حيث $\lambda_i = \sup(\alpha_i; \beta_i)$ و i تتنمي $\{1; 2; \dots; k\}$

مثال حدد $-180 \vee 1170$ و $-180 \wedge 1170$

تمرين

ليكن $n \in \mathbb{N}$ و p عدداً أولياً في \mathbb{N}

1- بين أن $\forall d \in \mathbb{N} \quad p/d \Rightarrow [\exists m \in \mathbb{N} \quad \exists d' \in \mathbb{N} \quad d = p^m d' \quad p \wedge d' = 1]$

2- برهن أن $\forall q \in \mathbb{N}^* - \{1\} \quad q/p^m \Leftrightarrow [\exists k \in \{1; 2; \dots; n\} \quad q = p^k]$ و استنتج عدد قواسم p^n

3- ليكن $a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_n^{\alpha_n}$ تفكيك للعدد الصحيح الطبيعي a إلى جداء من عوامل أولية
و $\varphi(a)$ عدد قواسم a

بين أن $\varphi(a) = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_n)$ و استنتاج عدد قواسم عدد صحيح نسبي

نظمة العد-VIII

نشاط تمهيدي-1

1- بين أن $\forall (m; n) \in \mathbb{N}^2 \quad m \geq 1 \Rightarrow m^n \geq 1 + n(m-1)$

2- استنتاج أن $\forall m \in \mathbb{N} \quad m > 1 \Rightarrow \forall p \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad m^n > p$

3- بين أن $\forall b \in \mathbb{N} \quad b > 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad b^k \leq n < b^{k+1}$

4- نبين أن $\forall (m; n) \in \mathbb{N}^2 \quad m \geq 1 \Rightarrow m^n \geq 1 + n(m-1)$

ليكن $m^n = ((m-1)+1)^n = \sum_{i=0}^{i=n} C_n^i (m-1)^i = 1 + n(m-1) + \sum_{i=2}^{i=n} C_n^i (m-1)^i$ لدينا $(m; n) \in \mathbb{N}^2$

و حيث أن $m-1 \geq 0$ فإن $m^n \geq 1 + n(m-1)$

5- نستنتج أن $\forall m \in \mathbb{N} \quad m > 1 \Rightarrow \forall p \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad m^n > p$

ليكن $m \in \mathbb{N}$ حيث $m > 1$

إذا وجدت n فإن $m^n \geq 1 + n(m-1)$

ليكن $p \in \mathbb{N}$

حسب أرخميدس يوجد n من \mathbb{N} حيث $1 + n(m-1) > p$ أي $n(m-1) > p-1$ إذن

6- نبين أن $\forall b \in \mathbb{N} \quad b > 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad b^k \leq n < b^{k+1}$

نعتبر $A_n = \{k \in \mathbb{Z} / n < b^{k+1}\}$

حسب (2) $A_n \neq \emptyset \Rightarrow \forall b \in \mathbb{N} \quad b > 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k_n \in \mathbb{N} \quad b^{k_n+1} > b^{k_n} > n$

$b^{k_{n_0}} \leq n < b^{k_{n_0}+1}$ أي أن $k_{n_0} \in A_n$ و منه يقبل أصغر عنصر k_{n_0}

لأن لو كان $n < k_{n_0} - 1 \geq 1$ و $n \geq 2$ فان $b^{k_{n_0}} \geq 2$ ومنه $b^{k_{n_0}} > n$ وبالتالي

وحيث $k_{n_0} - 1 \in A_n$ وهذا ينافي مع كون k_{n_0} أصغر عنصر لـ A_n

$$\left(b^0 \leq 1 \leq b^{0+1} \right) \quad k_{n_0} = 0 \quad \text{لو أن } n = 1 \quad \text{فان}$$

2- تعريف

أساس نظمة عد هو عدد الأرقام التي تستعمل لتمثيل الأعداد الصحيحة الطبيعية

أمثلة

» أساس نظمة العد العشري هو 10. الأرقام المستعملة هي 0 و 1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6 و 7 و 8 و 9

» أساس نظمة العد الثنائي هو 2. الأرقام المستعملة هي 0 و 1

» أساس نظمة العد الثنائي عشري هو 12. الأرقام المستعملة هي 0 و 1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6 و 7 و 8 و 9 و 10 و 11 نرمز في الكتابة لرقم 10 بـ α و لـ 11 بـ β

» أساس نظمة العد الثنائي هو 8. الأرقام المستعملة هي 0 و 1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6 و 7
- نظمة العد ذات الأساس b . ($b > 1$)

أ- تمهيدة

ليكن b عدداً صحيحاً طبيعياً حيث $(b > 1)$

لكل عدد صحيح طبيعي n يوجد k و r_k و q_k في \mathbb{N} حيث $n = b^k q_k + r_k$

البرهان

ليكن $(b; n) \in \mathbb{N}^2$ حيث $(b > 1)$

إذا كان $n = 0$ فإن نتيجة بدائية

إذا كان $n \in \mathbb{N}^*$ فإنه حسب النشاط التمهيدي $\exists! k \in \mathbb{N} \quad b^k \leq n < b^{k+1}$

يأجري القسمة الأقلية للعدد n على b نحصل على $n = b^k q_k + r_k$ و $0 \leq r_k < b^k$ و $0 \leq q_k < b$

إذا كان $q_k \geq b$ ومنه $q_k b^k \geq b^{k+1}$ و هذا ينافي مع كون $n = b^k q_k + r_k \geq b^{k+1}$ إذن $0 \leq q_k < b$

ب- حسب التمهيدة 1 لدينا $n = b^k q_k + r_k$ و $0 \leq r_k < b^k$

بتطبيق التمهيدة على r_k نحصل على $r_k = b^{k-1} q_{k-1} + r_{k-1}$ و $0 \leq r_{k-1} < b^{k-1}$ و $0 \leq r_k < b^k$

تطبيق التمهيدة على r_{k-1} وهكذا حتى نصل إلى r_1 فنحصل على

$$0 \leq q_{k-2} < b \quad 0 \leq r_{k-2} < b^{k-2} \quad r_{k-1} = b^{k-2} q_{k-2} + r_{k-2}$$

⋮ ⋮ ⋮

$$0 \leq q_1 < b \quad 0 \leq r_1 < b \quad r_2 = b q_1 + r_1 \\ q_0 = r_1 \quad r_1 = 1 \times q_0$$

بجمع جميع أطراف المتساويات نحصل على الكتابة في شكلها الوحيد $n = \sum_{i=0}^{i=k} q_i b^i$

حيث $0 \leq q_i < b$ و i تنتهي من $\{1; 2; \dots; k\}$

ليكن b عدداً صحيحاً طبيعياً حيث $(b > 1)$

$0 \leq q_i < b$ حيث $n = \sum_{i=0}^{i=k} q_i b^i$ لكل عدد صحيح طبيعي n يوجد عدد صحيح طبيعي k حيث

$n > 0$ إذا كان $q_k \in \{1; 2; \dots; k\}$ و $0 > q_k$ إذا كان $0 > n$

ملاحظة

الكتابة $n = \sum_{i=0}^{i=k} q_i b^i$ تبين أنه لتمثيل عدد صحيح طبيعي n في نظمة العد ذات الأساس b نحتاج إلى b رمز و نمثل العدد n في نظمة العد ذات الأساس b بكتابه

أمثلة

* في نظمة العد العشري كتابة العدد 2703 هي $2703 = 2 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 0 \times 10 + 3$

* في نظمة العد الثنائي كتابة العددان 8 و 15 هي

$\overline{1000} = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2 + 0$ أي أن العدد 8 ممثل في نظم العد الثنائي بـ

$\overline{1111} = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1$ أي أن العدد 15 ممثل في نظم العد الثنائي بـ

* في نظمة العد الثمانية

$$15 = \overline{17}_{(8)} \quad 15 = 1 \times 8 + 7$$

$$131 = \overline{203}_{(8)} \quad 131 = 2 \times 8^2 + 0 \times 8 + 3$$

ج- طريقة عملية لإيجاد تمثيل عدد صحيح طبيعي في نظمة عد ما

$n \in \mathbb{N}$ $b > 1$; $b \in \mathbb{N}$

لدينا

$$0 \leq r_0 < b \quad ; \quad n = bq_1 + r_0$$

$$0 \leq r_1 < b \quad ; \quad q_1 = bq_2 + r_1$$

$$0 \leq r_k < b \quad ; \quad q_k = bq_{k+1} + r_k$$

$$n \geq q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_q$$

ما أن المجموعة $A = \{q_1; q_2; \dots\}$ مكبورة في \mathbb{N} وغير فارغة فإنه يوجد k بحيث $q_k = r_k$ ومنه

$$0 \leq r_0 < b \quad ; \quad n = bq_1 + r_0$$

$$0 \leq r_1 < b \quad ; \quad q_1 = bq_2 + r_1$$

$$0 \leq r_{k-1} < b \quad ; \quad q_{k-1} = bq_k + r_{k-1}$$

$$q_k = r_k$$

وبضرب طرفي المتساوية رقم i بالعدد b^i نحصل على

$$n = bq_1 + r_0$$

$$bq_1 = b^2 q_2 + br_1$$

$$b^i q_i = b^{i+1} q_{i+1} + b^i r_i$$

هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

$$b^{k-1}q_{k-1} = b^k q_k + b^{k-1}r_{k-1}$$

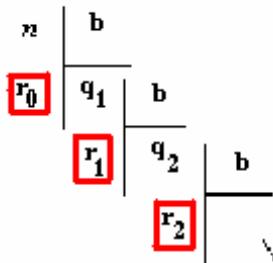
$$b^k q_k = b^k r_k$$

$$i \in \{1; 2; \dots; k\} \text{ و } 0 \leq r_i < b$$

بجمع أطراف المتساويات نحصل على

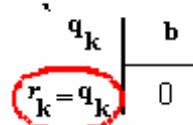
إذا كان $r_k \neq 0$ فان

طريقة عملية



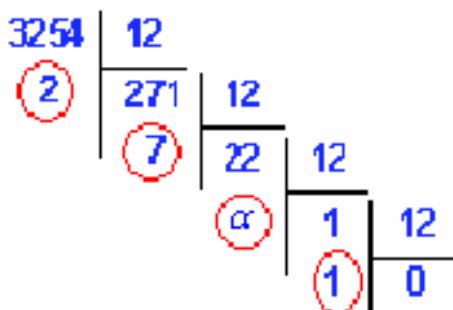
لتحديد تمثيل للعدد n في نظمة العد ذات الأساس b (0 ≤ i ≤ k) نحسب الباقي r_i

$$n = \overline{r_k r_{k-1} \dots r_1 r_0}(b)$$

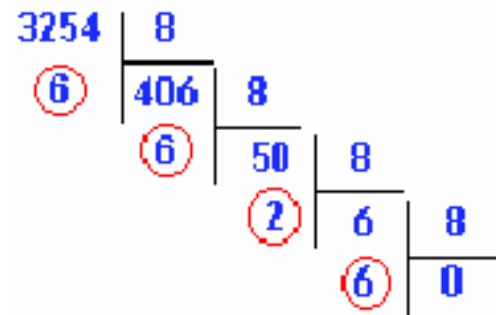


مثال

لنبحث عن تمثيل للعدد 3254 في نظمة العد الثماني ثم نظمة العد الائتماني



$$3254 = \overline{1\alpha 72}_{(12)}$$



$$3254 = \overline{6266}_{(8)}$$

4- مقارنة عددين ممثلين في نفس النظمة
خاصية

ليكن x و y ممثلين في نفس نظمة العد b

إذا كان $m > n$ فان $x > y$

خاصية

ليكن x و y ممثلين في نفس نظمة العد b

إذا كان $a_i \neq c_i$ فان ترتيب x و y هو نفس ترتيب a_i و c_i

5- تغيير أساس نظمة عد
لتمثيل عدد x في نظمة عد ذات الأساس b نمثله أولا في نظمة العد الائتماني و نحدد تمثيله في نظمة عد ذات الأساس b

تمرين

هل توجد نظمة العد ذات الأساس b حيث $\overline{xxx} \times \overline{xxx} = \overline{yyyyyy}$

ليكن $x = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ عدد صحيح طبيعي كتابته في نظمة العدد العشري هي

$$x \equiv 0 \pmod{4} \Leftrightarrow 4 \mid a_1 a_0$$

$$x \equiv 0 \pmod{5} \Leftrightarrow a_0 = 0 \quad \text{ou} \quad a_1 = 5$$

$$x \equiv 0 \pmod{5} \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \in \{00; 25; 50; 75\}$$

$$x \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{i=n} a_i \equiv 0 \pmod{3}$$

$$x \equiv 0 \pmod{9} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{i=n} a_i \equiv 0 \pmod{9}$$

$$x \equiv 0 \pmod{11} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i a_i \equiv 0 \pmod{11}$$