

الحسابيات

I- قابلية القسمة في \mathbb{Z}

1- تعريف

ليكن a و b من \mathbb{Z}
نقول إن b يقسم a و نكتب b/a إذا وجد k في \mathbb{Z} حيث $a = kb$
 $(a; b) \in \mathbb{Z}^2 \quad b/a \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad a = kb$

2- ملاحظات

*- إذا كان b يقسم a إننا نقول إن b قاسم لـ a أو a مضاعف لـ b
*- ليكن $b \in \mathbb{Z}$ مجموعة مضاعفات العدد b هي المجموعة $b \cdot \mathbb{Z} = \{k \cdot b / k \in \mathbb{Z}\}$
- ليكن $a \in \mathbb{Z}^ \quad b \in \mathbb{Z} \quad : \quad b/a \Rightarrow |b| \leq |a|$

3- خاصيات العلاقة " b/a "

*- $a/a \quad \forall a \in \mathbb{Z}$ نقول إن العلاقة " b/a " انعكاسية
*- $\left\{ \begin{array}{l} b/a \\ a/c \end{array} \Rightarrow b/c \right. \quad \forall (a; b; c) \in \mathbb{Z}^3$ نقول إن العلاقة " b/a " متعدية
*- $\left\{ \begin{array}{l} b/a \\ a/b \end{array} \Rightarrow |a| = |b| \right. \quad \forall (a; b; c) \in \mathbb{Z}^3$

ملاحظة

$\left\{ \begin{array}{l} b/a \\ a/b \end{array} \Rightarrow a = b \right. \quad \forall (a; b; c) \in \mathbb{N}^3$ نقول إن العلاقة " b/a " تخالفية في \mathbb{N}

تمرين

1- بين أن $\forall (a; b) \in \mathbb{Z}^2 \quad b/a \Leftrightarrow a \cdot \mathbb{Z} \subset b \cdot \mathbb{Z}$
2- بين أن $\forall (a; x_1; x_2; y_1; y_2) \in \mathbb{Z}^5 \quad a/(x_1 - y_1) \wedge a/(x_2 - y_2) \Leftrightarrow a/(x_1 x_2 - y_1 y_2)$

II- القسمة الاقليدية في \mathbb{Z}

1- القسمة الاقليدية في \mathbb{N}

مبرهنة

ليكن a و b من \mathbb{N} حيث $a \neq b$
يوجد زوج وحيد $(q; r)$ من \mathbb{N}^2 حيث $a = bq + r$ حيث $0 \leq r < b$

اصطلاحات

العملية التي تمكننا من تحديد $(q; r)$ بحيث $a = bq + r$ حيث $0 \leq r < b$ تسمى القسمة الاقليدية لـ a على b في \mathbb{N}
العدد a يسمى المقسوم و العدد b يسمى المقسوم عليه و العدد q الخارج و r الباقي.
2- القسمة الاقليدية في \mathbb{Z}

مبرهنة

ليكن a من \mathbb{Z} و b في $\mathbb{N}^* \quad a \neq b$
يوجد زوج وحيد $(q; r)$ من $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ حيث $a = bq + r$ حيث $0 \leq r < b$

اصطلاحات

العملية التي تمكننا من تحديد $(q; r)$ من $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ بحيث $a = bq + r$ حيث $0 \leq r < b$ تسمى القسمة الاقليدية لـ a على b في \mathbb{Z}
العدد a يسمى المقسوم و العدد b يسمى المقسوم عليه و العدد q الخارج و r الباقي

حدد الأعداد الصحيحة النسبية x بحيث يكون للقسمة الاقليدية لـ x على 7 خارج q و باقي q^2

بين إذا كان للقسمة الاقليدية لـ a على b و القسمة الاقليدية لـ a' على b نفس الخارج q و كان $a' < x < a$ فان خارج القسمة الاقليدية لـ x على b

III- الموافقة بترديد n

1- تعريف

ليكن a و b من \mathbb{Z} و n من \mathbb{N}
 نقول إن a يوافق b بترديد n و نكتب $[n]$ $a \equiv b$ إذا كان n يقسم $a - b$

$$\forall (a; b) \in \mathbb{Z}^2 \quad a \equiv b \quad [n] \Leftrightarrow n/a - b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad a - b = kn$$

2- خاصيات العلاقة " الموافقة بترديد n "

أ- $\forall a \in \mathbb{Z} \quad a \equiv a \quad [n]$ نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n " انعكاسية
 ب- $\forall (a; b) \in \mathbb{Z} \quad a \equiv b \quad [n] \Rightarrow b \equiv a \quad [n]$ نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n " تماثلية
 ج- $\forall (a; b) \in \mathbb{Z} \quad (a \equiv b \quad [n]) \text{ et } (b \equiv c \quad [n]) \Rightarrow a \equiv c \quad [n]$ نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n " متعدية
 نلخص الخاصيات أ و ب و ج بقولنا إن العلاقة " الموافقة بترديد n " علاقة تكافؤ

د- خاصية

ليكن a و b من \mathbb{Z} و n من \mathbb{N}
 $a \equiv b \quad [n]$ تكافئ a و b لهما نفس باقي القسمة الاقليدية على n

البرهان

ليكن a و b من \mathbb{Z} و n من \mathbb{N} بحيث $a = nq_1 + r_1$ و $b = nq_2 + r_2$ مع $0 \leq r_1 < n$ و $0 \leq r_2 < n$
 ❖ إذا كان a و b لهما نفس باقي القسمة الاقليدية على n أي $r_1 = r_2$ فان $a - b = n(q_1 - q_2)$
 أي أن $a \equiv b \quad [n]$
 ❖ عكسيا إذا كان $a \equiv b \quad [n]$ فانه يوجد k من \mathbb{Z} حيث $a - b = nk$
 و منه $r_1 - r_2 = (k - q_1 - q_2)n$ أي n يقسم $r_1 - r_2$
 ولدينا $0 \leq r_1 < n$ و $0 \leq r_2 < n$ و منه $|r_1 - r_2| < n$
 وبالتالي $r_1 - r_2 = 0$ أي $r_1 = r_2$

3- المجموعة $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

* $\forall (a; n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad \exists (q; r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad a = nq + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < n$
 - $\forall (a; n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad \exists r \in \mathbb{N} \quad a \equiv r \quad [n] \quad \text{et} \quad r \in \{0; 1; \dots; n-1\}$
 - المجموعة $\{x \in \mathbb{Z} / x \equiv r \quad [n]\}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية التي لها نفس الباقي r في القسمة الاقليدية على n نرمز لها بـ \bar{r}
 المجموعة \bar{r} تسمى صنف تكافؤ r بالنسبة للعلاقة " الموافقة بترديد n " في \mathbb{Z}
 - $x \in \bar{r} \Leftrightarrow x \equiv r \quad [n]$
 * $\forall a \in \mathbb{Z} \quad \exists r \in \{0; 1; \dots; n-1\} / \quad \bar{a} \equiv \bar{r}$ أي $\forall a \in \mathbb{Z} \quad \exists r \in \{0; 1; \dots; n-1\} / \quad a \equiv r \quad [n]$
 * إذا كان $\bar{r} = \bar{r}'$ و $0 \leq r < n$ و $0 \leq r' < n$ فان $r = r'$
 * $\forall (x; n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad \exists r \in \{0; 1; \dots; n-1\} / \quad x \in \bar{r}$ (باقي القسمة الاقليدية على n)
 اذن $\mathbb{Z} = \bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2} \cup \dots \cup \overline{(n-1)}$
 المجموعة $\{\bar{0}; \bar{1}; \dots; \overline{(n-1)}\}$ نرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
 عناصر $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ منفصلة مثنى مثنى

أمثلة

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}\} \quad * \quad \text{حيث } \bar{0} = 2 \cdot \mathbb{Z} \text{ و } \bar{1} = \{x \in \mathbb{Z} / x = 2k + 1 \ (k \in \mathbb{Z})\} \\ \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}; \bar{6}\} \quad * \quad \text{حيث } \bar{0} = 7 \cdot \mathbb{Z} \text{ و } \bar{1} = \{x \in \mathbb{Z} / x = 7k + 1 \ (k \in \mathbb{Z})\} \\ \bar{2} = \{x \in \mathbb{Z} / x = 7k + 2 \ (k \in \mathbb{Z})\} \text{ و } \bar{3} = \{x \in \mathbb{Z} / x = 7k + 3 \ (k \in \mathbb{Z})\} \\ \bar{6} = \{x \in \mathbb{Z} / x = 7k + 6 \ (k \in \mathbb{Z})\} \text{ و } \dots \\ \text{في } \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \text{ لدينا } \bar{532} = \bar{4} \text{ لأن } [7] \quad 532 \equiv 4 \\ \bar{-36} = \bar{6} \text{ لأن } [7] \quad -36 \equiv 6 \end{aligned}$$

4- انسجام العلاقة " الموافقة بترديد n" مع الجمع والضرب
أ- خاصية

ليكن x و y و z و t من \mathbb{Z} و n من \mathbb{N}
إذا كان $x \equiv y [n]$ و $x \equiv y [n]$ و $z \equiv t [n]$ فإن $x + z \equiv y + t [n]$
إذا كان $x \equiv y [n]$ و $x \equiv y [n]$ و $z \equiv t [n]$ فإن $x \times z \equiv y \times t [n]$
نقول إن العلاقة " الموافقة بترديد n" منسجمة مع الجمع والضرب

ب- نتائج

$$\begin{aligned} * \text{- إذا كانت } x \in \bar{r} \text{ و } x' \in \bar{r}' \text{ فإن } x + x' \in \overline{r + r'} \text{ و } x \times x' \in \overline{r \times r'} \text{ نكتب } \overline{r + r'} = \bar{r} + \bar{r}' \\ \text{و } \overline{r \times r'} = \bar{r} \times \bar{r}' \\ * \text{- } \forall (a; b) \in \mathbb{Z}^2 \quad \forall (p; n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \quad a \equiv b [n] \Rightarrow a^p \equiv b^p [n] \end{aligned}$$

أمثلة

$$\text{في } \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \quad \bar{3} + \bar{4} = \bar{7} = \bar{2} \quad , \quad \bar{0} + \bar{1} + \bar{2} + \bar{3} + \bar{4} = \bar{10} = \bar{0} \quad , \quad \bar{3} \times \bar{4} = \bar{12} = \bar{2}$$

تمرين

$$\text{حدد مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية } x \text{ حيث في } \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \quad \bar{x} + \bar{5} = \bar{2}$$

تمرين

$$1 \text{- أعط جدول الجمع ثم الضرب في } \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

$$2 \text{- بين أن العدد } 2^{70} + 3^{70} \text{ قابلة للقسمة على } 13$$

تمرين

$$1 \text{- بين أن } \forall n \in \mathbb{N} \quad n(n^4 - 1) \equiv 0 [n]$$

$$2 \text{- بين أن } 17 \text{ يقسم } 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^*$$

$$3 \text{- ليكن } n \text{ من } \mathbb{N} \text{ ، حدد بواقي القسمة الاقليدية للأعداد } 1^n + 2^n + 3^n + 4^n \text{ على } 4$$

IV- القاسم المشترك الأكبر

نرمز لمجموعة قواسم العدد الصحيح النسبي a بالرمز D_a

1- تعريف

ليكن a و b من \mathbb{Z}^*
القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو أكبر قاسم مشترك موجب قطعاً لـ a و b يرمز له
بـ $a \wedge b$

$$\delta = a \wedge b \Leftrightarrow \begin{cases} \delta \in D_a \cap D_b \\ \forall x \in D_a \cap D_b \quad x \leq \delta \end{cases}$$

ليكن a و b و c من \mathbb{Z}^*

$$a \wedge b = b \wedge a$$

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

$$a \wedge a = |a|$$

$$48 \wedge 60 = 12 \quad \text{مثال}$$

3- خوارزمية اقليدس أو طريقة " القسمة المتتالية " لتحديد القاسم المشترك
أ- ملاحظة

$$\forall a \in \mathbb{Z}^* \quad D_a = D_{-a} \quad *$$

ب- ليكن a و b من \mathbb{N}^* $\forall (a; b) \in \mathbb{Z}^{*2} \quad a \wedge b = |a| \wedge |b|$ *
ومنه تحديد القاسم المشترك الأكبر لعددتين صحيحين نسبيين
يرجع إلى تحديد القاسم المشترك الأكبر لعددتين صحيحين طبيعيين.

- إذا كان b/a فإن $a \wedge b = b$

- إذا كان b لا يقسم a فانه يوجد زوج وحيد $(q; r)$ من $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ حيث $a = bq + r$ و $0 < r < b$

بما أن $r = a - bq$ فان كل قاسم مشترك لـ a و b يقسم r

و بالتالي قاسم قاسم مشترك لـ a و b هو قاسم مشترك لـ b و r أي $D_a \cap D_b \subset D_r \cap D_b$

عكسيا كل قاسم مشترك لـ b و r يقسم a (لأن $a = bq + r$)

ومنه كل قاسم مشترك لـ b و r هو قاسم مشترك لـ a و b أي $D_r \cap D_b \subset D_a \cap D_b$

إذن $D_a \cap D_b = D_r \cap D_b$ و بالتالي $a \wedge b = r \wedge b$

تمهيدة

ليكن a و b من \mathbb{N}^* بحيث b لا يقسم a و r باقي القسمة الاقليدية لـ a على b
 $a \wedge b = r \wedge b$

ج- ليكن a و b من \mathbb{N}^* نفترض أن $b < a$

بإجراء القسمة الاقليدية لـ a على b نحصل على $a = bq_1 + r_1$ حيث $0 \leq r_1 < b$

❖ إذا كان $r_1 = 0$ فإن b/a و منه $a \wedge b = b$

❖ إذا كان $r_1 > 0$ نجري القسمة الاقليدية لـ b على r_1 و نحصل على $b = r_1 q_2 + r_2$ و $0 \leq r_2 < r_1$

إذا كان $r_2 = 0$ فإن $b \wedge r_1 = r_1$ و منه $a \wedge b = b \wedge r_1 = r_1$

إذا كان $r_2 > 0$ نجري القسمة الاقليدية لـ r_1 على r_2 و نحصل على $r_1 = r_2 q_3 + r_3$ و $0 \leq r_3 < r_2$

.....

بإجراء العملية n مرة نحصل على

$$a \wedge b = b \wedge r_1, \quad 0 < r_1 < b, \quad a = bq_1 + r_1$$

$$b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2, \quad 0 < r_2 < r_1, \quad b = r_1 q_2 + r_2$$

$$r_1 \wedge r_2 = r_2 \wedge r_3, \quad 0 < r_3 < r_2, \quad r_1 = r_2 q_3 + r_3$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$r_{n-2} \wedge r_{n-1} = r_{n-1} \wedge r_n, \quad 0 < r_n < r_{n-1}, \quad r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n$$

و منه نستنتج $a \wedge b = b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2 = r_2 \wedge r_3 = \dots = r_{n-2} \wedge r_{n-1} = r_{n-1} \wedge r_n$

$$0 < r_n < r_{n-1} < \dots < r_3 < r_2 < r_1 < b$$

نضع $A = \{r_1; r_2; r_3; \dots; r_n; \dots\}$

A جزء من \mathbb{N} مكبور بالعدد b و منه A مجموعة منتهية

$$\text{إذن } \exists p \in \mathbb{N} / r_{p+1} = 0 ; r_p \neq 0$$

بما أن $r_{p+1} = 0$ فإن $r_{p-1} = r_p q_{p+1}$ و منه $r_{p-1} \wedge r_p = r_b$

إذن $a \wedge b = r_p$

نتيجة

ليكن a و b من \mathbb{N}^*
القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو آخر باقي غير منعدم في طريقة القسمة المتتالية لـ a على b

مثال باستعمال طريقة القسمة المتتالية، نحدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 156 و 1640

$$1640 = 156 \times 10 + 80$$

$$156 = 80 \times 1 + 76$$

$$80 = 76 \times 1 + 4$$

$$76 = 4 \times 19 + 0$$

$$1640 \wedge 156 = 4 \quad \text{إذن}$$

-3- خاصيات

أ- مبرهنة

ليكن a و b من \mathbb{Z}^* و $\delta = a \wedge b$
يوجد عددين u و v من \mathbb{Z} حيث $\delta = au + bv$

البرهان

ليكن a و b من \mathbb{Z}^* و $\delta = a \wedge b$

نعتبر $A = \{n \in \mathbb{N}^* / n = au + bv ; (u; v) \in \mathbb{Z}^2\}$

لدينا $A \neq \emptyset$ لأن $a^2 + b^2 \in A$

$A \subset \mathbb{N}$ و بالتالي $\forall x \in A \quad x \geq p$

ليكن $p = au_0 + bv_0$ نبرهن أن $\delta = p$

❖ بما أن δ/a و δ/b فإن δ/p و منه $\delta \leq p$

❖ بإنجاز القسمة لـ a على p نحصل على $a = pq + r$; $0 \leq r < p$ $\exists (q; r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$

❖ و منه $r = a - q(a u_0 + b v_0) = a(1 - q u_0) + b(-q v_0)$

إذا كان $r > 0$ فإن $r \in A$ و منه $r \geq p$ و هذا يتناقض مع كون $r < p$

و بالتالي $r = 0$ أي p/a و بنفس الطريقة نبرهن أن p/b

و منه p قاسم مشترك لـ a و b وبالتالي $\delta \geq p$

لدينا $\delta \leq p$ و $\delta \geq p$ إذن $\delta = p$

ب- استنتاجات

* من البرهان السابق نستنتج $\delta = a \wedge b$ هو أصغر عدد موجب قطعاً من المجموعة

$$B = \{n \in \mathbb{Z}^* / n = au + bv ; (u; v) \in \mathbb{Z}^2\}$$

* بما أن δ قاسم مشترك لـ a و b فإن أي قاسم لـ δ يقسم a و b

عكسيا إذا كان c قاسم مشترك لـ a و b فإن $a = k_1 c$; $b = k_2 c$ $\exists (k_1; k_2) \in \mathbb{Z}^2$

بما أن $\delta = a \wedge b$ فانه $\delta = au + bv$ $\exists (u; v) \in \mathbb{Z}^2 /$

و منه $\delta = (k_1 u + k_2 v) c$ أي δ يقسم c

مبرهنة

ليكن a و b من \mathbb{Z}^* و $\delta = a \wedge b$

مجموعة قواسم δ هي مجموعة القواسم المشتركة لـ a و b ($D_a \cap D_b = D_\delta$)

نتيجة

إذا كان a و b و c أعداد من \mathbb{Z} فإن

$$a \wedge b = \delta \Rightarrow ca \wedge cb = |c| \delta$$

a_1 و a_2 و a_3 و a_k أعداد من \mathbb{Z}^*

أكبر عدد صحيح طبيعي يقسم في آن واحد a_1 و a_2 و a_3 و a_k يسمى القاسم المشترك الأكبر لـ a_1

و a_2 و a_3 و a_k

$$12 \wedge -18 \wedge 15 = 3 \quad \text{مثال}$$

نتيجة

إذا كان δ هو القاسم المشترك الأكبر لـ a_1 و a_2 و a_3 و a_k فإنه توجد أعداد α_1 و α_2 و α_3 و

$$\alpha_k \text{ من } \mathbb{Z} \text{ حيث } \sum_{i=1}^{i=k} \alpha_i a_i$$

V- الأعداد الأولية فيما بينها

1- تعريف

ليكن a و b من \mathbb{Z}^*

نقول a و b أوليان فيما بينهما إذا كان $a \wedge b = 1$

2- مبرهنة Bezout

ليكن a و b من \mathbb{Z}^*

إذا كان $a \wedge b = 1$ فإنه $\exists (u; v) \in \mathbb{Z}^2 / au + bv = 1$

عكسياً: ليكن a و b من \mathbb{Z}^* حيث $\exists (u; v) \in \mathbb{Z}^2 / au + bv = 1$

ومنه كل قاسم مشترك لـ a و b يقسم 1 و بالتالي $D_a \cap D_b = \{-1; 1\}$ أي $a \wedge b = 1$

مبرهنة Bezout

ليكن a و b من \mathbb{Z}^*

$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \exists (u; v) \in \mathbb{Z}^2 / au + bv = 1$$

3- نتيجة

ليكن a و b من \mathbb{Z}^* و d قاسم مشترك لـ a و b

$$a \wedge b = |d| \Leftrightarrow \frac{a}{|d|} \wedge \frac{b}{|d|} = 1$$

ملاحظة

إذا كان a و b من \mathbb{Z}^* و $a \wedge b = \delta$ فإن يوجد p و q من \mathbb{Z}^*

$$\text{حيث } b = q\delta ; a = \delta p ; p \wedge q = 1$$

4- مبرهنة كوص Théorème de GAUSS

أ- مبرهنة

ليكن a و b و c من \mathbb{Z}^*

إذا كان c يقسم الجداء ab و كان $a \wedge c = 1$ فإن c يقسم b

البرهان

ليكن a و b و c من \mathbb{Z}^* حيث c/ab و $a \wedge c = 1$

ومنه $\exists (u; v; k) \in \mathbb{Z} / au + cv = 1 ; ab = kc$

$$\text{و بالتالي } b = b \times 1 = b(au + cv) = bau + bcv = kcu + bcv = c(ku + bv)$$

اذن c يقسم b

ب- استنتاجات

a - مبرهنة

ليكن a و b و c من \mathbb{Z}^*

$$a \wedge b = 1 \text{ et } a/c \text{ et } b/c \Rightarrow ab/c$$

يكون x قابل للقسمة على 6 إذا كان قابل للقسمة على 2 و 3

مثال
ملاحظة

الشرط $a \wedge b = 1$ ضروري

مثال 36 يقبل القسمة على 4 و 2 و 6، ولا يقبل القسمة على $24 = 4 \times 6$

-b مبرهنة

$$\text{ليكن } a \text{ و } b \text{ و } c \text{ من } \mathbb{Z}^* \text{ و } n \text{ من } \mathbb{N}^* \\ \begin{cases} ab \equiv ac \\ a \wedge n = 1 \end{cases} [n] \Rightarrow b \equiv c [n]$$

البرهان

$$ab \equiv ac [n] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad ab - ac = kn$$

$$\Leftrightarrow n/a(b-c)$$

وحيث أن $a \wedge n = 1$ فإن $n/(b-c)$ إذن $b \equiv c [n]$

-5 خاصيات

$$\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \wedge bc = 1 \quad \mathbb{Z}^* \text{ ليكن } a \text{ و } b \text{ و } c \text{ من}$$

$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a \wedge b^n = 1 \quad \mathbb{Z}^* \text{ ليكن } a \text{ و } b \text{ و } n \text{ من}$$

$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a^m \wedge b^n = 1 \quad \mathbb{Z}^* \text{ ليكن } a \text{ و } b \text{ و } n \text{ و } m \text{ من}$$

نتيجة

$$\mathbb{Z}^* \text{ ليكن } a \text{ و } b \\ \text{إذا كان } a \wedge b = 1 \text{ فإن } x = au + bv \quad \forall x \in \mathbb{Z} \quad \exists (u; v) \in \mathbb{Z}^2$$

تمرين محلول

تمرين حدد الأعداد الصحيحة النسبية حيث $17x + 3y = 94$

الحل

الطريقة 1

$$\text{لدينا } 17 \times 2 + 3 \times 20 = 94 \text{ و } 17x + 3y = 94 \text{ ومنه } 17(x-2) + 3(y-20) = 0$$

$$\text{أي } -17(x-2) = 3(y-20)$$

$$\text{ومنه } 3/17(x-2) \text{ وحيث أن } 17 \wedge 3 = 1 \text{ فإن } 3/(x-2) \text{ أي } x-2 = 3k \quad \exists k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{وبالتالي } x = 3k + 2 \quad \exists k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ومنه } 17(3k+2) + 3y = 94 \quad \exists k \in \mathbb{Z} \text{ و بالتالي } y = -17k + 20$$

$$\text{إذن } S = \{(3k+2; -17k+20) / k \in \mathbb{Z}\}$$

الطريقة 2

$$17x + 3y = 94 \Leftrightarrow 17x - 94 = 3y$$

$$\Leftrightarrow 17x \equiv 94 [3]$$

$$\Leftrightarrow 2x \equiv 1 [3]$$

$$\Leftrightarrow -x \equiv 1 [3]$$

$$\Leftrightarrow -x \equiv -(-1) [3]$$

$$\text{بما أن } -1 \wedge 3 = 1 \text{ فإن } x = -1 [3] \text{ ومنه } x = 3k - 1 \quad \exists k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{و بالتالي } y = 17k + 37 \quad \exists k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{إذن } S = \{(3k-1; 17k+37) / k \in \mathbb{Z}\}$$

حدد الأعداد q و u_0 من المجموعة \mathbb{N}^* بحيث $u_0 \wedge q = 1$ و الأعداد u_0 و u_1 و u_2 و u_3 حدود المتتالية الهندسية التي أساسها q و تحقق $u_1 + 2u_3 = 44u_0^2$

بين إذا كان $a \wedge b = 1$ فإن $(a+b) \wedge b = 1$ و $(a+b) \wedge ab = 1$
استنتج أن $\frac{2n+3}{n^2+3n+2}$ غير قابلة للاختزال

بين أن العدد $\sqrt{\frac{2}{3}}$ عدد لاجدري

6- الأعداد الأولية فيما بينها في مجموعها

نقول إن الأعداد a_1 و a_2 و a_3 و و a_n من \mathbb{Z}^* أولية فيما بينها في مجموعها إذا كان القاسم المشترك الأكبر لهذه الأعداد هو 1

عندما نقول إن الأعداد a_1 و a_2 و a_3 و و a_n من \mathbb{Z}^* أولية فيما بينها في مجموعها هذا لا يعني أولية فيما بينها مثنى مثنى

نقول إن الأعداد a_1 و a_2 و a_3 و و a_n من \mathbb{Z}^* أولية فيما بينها في مجموعها إذا وفقط وجدت أعداد u_1 و u_2 و u_3 و و u_n من \mathbb{Z}^* حيث $\sum_{i=1}^n u_i a_i = 1$

حل المعادلة $ax + by = c$ $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$

نحل في \mathbb{Z}^2 $1075x + 64y = 9$

نطبق خوارزمية اقليدس لتحديد $1075 \wedge 64$

$$1075 = 64 \times 16 + 51$$

$$64 = 51 \times 1 + 13$$

$$51 = 13 \times 3 + 12$$

$$13 = 12 \times 1 + 1$$

$$12 = 12 \times 1 + 0$$

ومنه $1075 \wedge 64 = 1$

ومنه يوجد $(x; y)$ من \mathbb{Z}^2 حيث $1075x + 64y = 9$

لنضع $a = 1075$ و $b = 64$

من خوارزمية اقليدس نستنتج أن

$$51 = a - 16b$$

$$13 = b - (a - 16b)$$

$$12 = a - 16b - 3(b - (a - 16b))$$

$$1 = b - (a - 16b) - (a - 16b - 3(b - (a - 16b)))$$

$$1 = -5a + 84b$$

ومنه $9 = -45a + 756b$ أي $9 = -45 \times 1075 + 756 \times 64$

ومنه $(-45; 756)$ حل للمعادلة $1075x + 64y = 9$ و بالتالي $1075(x + 45) + 64(y - 756) = 0$

و بالتالي $64/1075(x + 45)$ و حيث أن $1075 \wedge 64 = 1$ فإن $64/(x + 45)$

هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma :

إذن $\exists k \in \mathbb{Z} \quad x + 45 = 64k$ أي $\exists k \in \mathbb{Z} \quad x = 64k - 45$ ومنه $\exists k \in \mathbb{Z} \quad y = 1075k + 756$ فإنهما يحققان المعادلة $1075x + 64y = 9$ إذن $S = \{(64k - 45; 1075k + 756) / k \in \mathbb{Z}\}$

ب - الحالة العامة

نعتبر المعادلة $(E) \quad (x; y) \in \mathbb{Z}^2 \quad ax + by = c$ حيث $a \neq 0$ و $b \neq 0$
 نضع $\delta = a \wedge b$ ومنه $\exists (a'; b') \in \mathbb{Z}^{*2} / a = \delta a' \quad \text{et} \quad b = \delta b' \quad a' \wedge b' = 1$
 * إذا كان δ / c فإن المعادلة تصبح $a'x + b'y = c'$ بوضع $c = \delta c'$
 بما أن $a' \wedge b' = 1$ فإنه يوجد $(u_0; v_0) \in \mathbb{Z}^{*2}$ حيث $a'u_0 + b'v_0 = c'$ أي المعادلة $a'x + b'y = c'$ تقبل حلا
 * عكسيا إذا كان للمعادلة $ax + by = c$ في \mathbb{Z}^2 ليكن $(x_0; y_0)$ حلا للمعادلة أي $ax_0 + by_0 = c$
 ومنه $\delta(a'x_0 + b'y_0) = c$ إذن δ / c

خاصية

ليكن $(a; b)$ من \mathbb{Z}^2 و $\delta = a \wedge b$
 للمعادلة $ax + by = c$ حلول في \mathbb{Z}^2 إذا وفقط إذا كان δ / c

حل المعادلة $ax + by = c$
 لنفترض أن δ / c إذن حل المعادلة يرجع إلى حل المعادلة $a'x + b'y = c'$
 بما أن $a' \wedge b' = 1$ فإنه يوجد $(u_0; v_0)$ حيث $a'u_0 + b'v_0 = c'$ أي $a'c'u_0 + b'c'v_0 = c'$
 ومنه $a'(x - c'u_0) + b'(y - c'v_0) = 0$ وبالتالي $a'(x - c'u_0) = -b'(y - c'v_0)$
 وبالتالي $a' / (c'v_0 - y) = 1 = a' \wedge b'$ و $a' / b' (c'v_0 - y)$
 إذن $y = -a'k + c'v_0$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ ومنه نستنتج أن $x = kb' + c'u_0$
 عكسيا نتأكد أن $(kb' + c'u_0; -a'k + c'v_0)$ هو حل للمعادلة $a'x + b'y = c'$
 إذن $\{(kb' + c'u_0; -a'k + c'v_0) / k \in \mathbb{Z}\}$

تمرين

حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة $7x - 3y = 1$
 ليكن a من \mathbb{N} بحيث باقي القسمة الاقليدية لـ a على 7 و 3 على التوالي 1 و 2
 حدد باقي القسمة الاقليدية لـ a على 35

VI- المضاعف المشترك الأصغر

1- تعريف

ليكن $(a; b) \in \mathbb{Z}^{*2}$
 المضاعف المشترك الأصغر لـ a و b هو أصغر مضاعف مشترك موجب لـ a و b نرمز له بـ $a \vee b$

2- خاصيات

أ- * ليكن a و b و c من \mathbb{Z}^*
 $a \vee b = b \vee a$
 $(a \vee b) | c = ac \vee bc$
 $a \wedge a = |a|$
 $b/a \Leftrightarrow a \vee b = |a|$
 ب- * ليكن a و b من \mathbb{Z}^* و $a \vee b = m$
 كل مضاعف مشترك لـ a و b هو مضاعف للعدد m

ج- مبرهنة

ليكن a و b من \mathbb{Z}^* و $a \vee b = m$ و $a \wedge b = \delta$
 $m\delta = |ab|$

$$\text{ليكن } a \text{ و } b \text{ من } \mathbb{Z}^* \\ a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a \vee b = |ab|$$

3- المضاعف المشترك لعدة أعداد

تعريف

a_1 و a_2 و a_3 و a_k أعداد من \mathbb{Z}^*
أصغر مضاعف مشترك موجب للأعداد a_1 و a_2 و a_3 و a_k يسمى المضاعف المشترك الأصغر لـ a_1 و a_2 و a_3 و a_k

VII- الأعداد الأولية

1- تعريف

أ- القواسم الفعلية لعدد صحيح نسبي

تعريف

ليكن $a \in \mathbb{Z}$
نقول إن العدد d قاسم فعلي للعدد a إذا و فقط إذا كان d يقسم a و $d \notin \{-1; 1; -a; a\}$

أمثلة

*- القواسم الفعلية للعدد 6 هي 2 و -2 و 3 و -3
*- لدينا $D_7 = \{1; -1; 7; -7\}$ العدد 7 لا يقبل قواسم فعلية

ب- الأعداد الأولية

تعريف

ليكن $a \in \mathbb{Z}$
نقول إن العدد a أولي إذا و فقط إذا كان a يخالف 1 و -1 و ليس له قواسم فعلية
 a أولي $\Leftrightarrow D_a = \{1; -1; a; -a\}$ و $|a| \neq 1$

نرمز لمجموعة الأعداد الأولية بـ P

2- خاصيات

أ- إذا كان p و q عددين أوليين و $|q| \neq |p|$ فانهما أوليين فيما بينهما (العكس غير صحيح)
ب- إذا كان p أولي فانه أولي مع أي عدد a من \mathbb{Z} بحيث p لا يقسم a
ج- ليكن a عددا غير أولي في \mathbb{Z}^* و يخالف 1 و -1 .
أصغر قاسم فعلي موجب للعدد a هو عدد أولي
د- مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية

البرهان

نبرهن أن مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية

لتكن P^+ مجموعة الأعداد الأولية الموجبة

$$2 \in P^+ \text{ لأن } P^+ \neq \emptyset$$

لنفترض أن P^+ منتهية و ليكن p أكبر عنصر من P^+ . لنعتبر $m = p! + 1$ لدينا $m > p$

ومنه $m \notin P^+$ أي m ليس أوليا و بالتالي للعدد m قاسم أولي q ومنه $q \in P^+$ و $q \leq p$

$q \leq p$ يستلزم q يقسم $p!$ لأن (q أحد عوامل $p!$)

لدينا q/m و $q/p!$ ومن $q/(m-p!)$ أي $q/1$ وهذا يتناقض مع كون q أولي

ومنه P^+ غير منتهية إذن P غير منتهية

3- طريقة عملية لتحديد الأعداد الأولية

مبرهنة

ليكن $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$
إذا كان n غير أولي فانه يوجد عدد أولي موجب p يقسم n و $p^2 \leq n$

البرهان

ليكن $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$ و n غير أولي و ليكن p أصغر قاسم فعلي موجب لـ n إذن p أولي ومنه يوجد

$$n = pk \text{ حيث } k \in \mathbb{N}^*$$

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

بما أن $1 < p < n$ فإن $1 < k < kp = n$ إذن k قاسم فعلي موجب للعدد n و بالتالي $p \leq k$

$$p^2 \leq pk = n$$

ملاحظة

ليكن $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$

لتأكد من أن n هل أولي أم لا. نرى هل يقبل القسمة على أحد الأعداد الأولية p حيث $p^2 \leq n$

❖ فإذا كان يقبل القسمة على أحدهم فإن n غير أولي

❖ وإذا كان لا يقبل القسمة على أي واحد مهن فإن n عدد أولي

(عمليا نتوقف عندما تكون $p^2 > n$)

مثال العدد 179 لا يقبل القسمة على أي عدد من الأعداد الأولية التالية 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13

$$17^2 = 289 ; 13^2 = 169$$

4- خاصيات

خاصية

*- إذا كان عدد أولي يقسم جداء أعداد صحيحة نسبية فانه يقسم أحد عوامل هذا الجداء

البرهان

ليكن p عددا أوليا و $a = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$ جداء n من الأعداد الصحيحة النسبية

نفترض أن p/a نبين p/a_i $\exists i \in \{1; 2; \dots; n\}$

من أجل $n = 2$ لدينا $p/a_1 \times a_2$. إذا كان p/a_1 فإن ذلك هو المطلوب

إذا كان p لا يقسم a_1 فإن $a_1 \wedge p = 1$ وحيث $p/a_1 \times a_2$ فإن حسب GAUSS p/a_2

لنفرض أن الخاصية صحيحة بالنسبة لـ n لنبره صحتها بالنسبة لـ $n+1$

ليكن $b = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n \times a_{n+1}$ بحيث p/b

إذا كان p/a_{n+1} فإن ذلك هو المطلوب

إذا كان p لا يقسم a_{n+1} فإن $a_{n+1} \wedge p = 1$ وحيث p/b فإن حسب GAUSS $p/a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$

ومنه p/a_i $\exists i \in \{1; 2; \dots; n\}$

نتيجة

لتكن p_1 و p_2 و p_n أعداد أولية موجبة و p عددا أوليا

$$p = p_i \quad \exists i \in \{1; 2; \dots; n\} \Rightarrow p/p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$$

5- التفكير الى جداء من عوامل أولية

1- مبرهنة

كل عدد صحيح نسبي n غير منعدم ومخالف لـ 1 و -1 يمكن كتابته بكيفية وحيدة على شكل

$$n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k} \quad \text{حيث } p_1, p_2, \dots, p_n \text{ أعداد أولية مختلفة مثنى مثنى و } \alpha_1$$

و $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة و $\varepsilon = \pm 1$

ملاحظة عندما نكتب n على شكل $n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$ فاننا نقول اننا فككنا n الى جداء

عوامل أولية

مثال فكك العدد 1752- الى جداء عوامل أولية

2- تطبيقات

(A) نتيجة 1

ليكن $n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$ حيث p_1, p_2, \dots, p_n أعداد أولية

يكون عدد d قاسما للعدد n اذا وفقط اذا كان تفكيك d الى عوامل جداء أولية على شكل

$$d = \varepsilon p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \dots \times p_k^{\beta_k}$$

حيث $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ لكل i من $\{1; 2; \dots; k\}$

نتيجة 2

ليكن $n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$ حيث p_1, p_2, \dots, p_n أعداد أولية

يكون عدد m مضاعفا للعدد n إذا وفقط إذا كان تفكيك m الى عوامل جداء أولية على شكل

$$d = \varepsilon p_1^{\lambda_1} \times p_2^{\lambda_2} \times \dots \times p_k^{\lambda_k}$$

حيث $0 \leq \alpha_i \leq \lambda_i$ لكل i من $\{1, 2, \dots, k\}$

(B) القاسم المشترك الأكبر - المضاعف المشترك الأصغر
+ القاسم المشترك الأكبر
نتيجة

ليكن a و b من \mathbb{Z}^* حيث $a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$ و $b = \varepsilon p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \dots \times p_k^{\beta_k}$ و p_1, p_2, \dots, p_n أعداد أولية

القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو العدد $\delta = p_1^{\lambda_1} \times p_2^{\lambda_2} \times \dots \times p_k^{\lambda_k}$ حيث $\lambda_i = \inf(\alpha_i; \beta_i)$ و i تنتمي $\{1, 2, \dots, k\}$

+ المضاعف المشترك الأصغر
نتيجة

ليكن a و b من \mathbb{Z}^* حيث $a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$ و $b = \varepsilon p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \dots \times p_k^{\beta_k}$ و p_1, p_2, \dots, p_n أعداد أولية

المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو العدد $m = p_1^{\lambda_1} \times p_2^{\lambda_2} \times \dots \times p_k^{\lambda_k}$ حيث $\lambda_i = \sup(\alpha_i; \beta_i)$ و i تنتمي $\{1, 2, \dots, k\}$

مثال حدد $-180 \wedge 1170$ و $-180 \vee 1170$

تمرين

ليكن $n \in \mathbb{N}$ و p عددا أوليا في \mathbb{N}

1- بين أن $\forall d \in \mathbb{N} \quad p/d \Rightarrow [\exists m \in \mathbb{N} \quad \exists d' \in \mathbb{N} \quad d = p^m d' \quad p \wedge d' = 1]$

2- برهن أن $\forall q \in \mathbb{N}^* - \{1\} \quad q/p^m \Leftrightarrow [\exists k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad q = p^k]$ و استنتج عدد قواسم p^n

3- ليكن $a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_n^{\alpha_n}$ تفكيك للعدد الصحيح الطبيعي a إلى جداء من عوامل أولية و $\varphi(a)$ عدد قواسم a

بين أن $\varphi(a) = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_n)$ و استنتج عدد قواسم عدد صحيح نسبي

VIII- نظمات العد

1- نشاط تمهيدي

1- بين أن $\forall (m; n) \in \mathbb{N}^2 \quad m \geq 1 \Rightarrow m^n \geq 1 + n(m-1)$

2- استنتج أن $\forall m \in \mathbb{N} \quad m \succ 1 \Rightarrow \forall p \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad m^n \succ p$

3- بين أن $\forall b \in \mathbb{N} \quad b \succ 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists ! k \in \mathbb{N} \quad b^k \leq n < b^{k+1}$

1- نبين أن $\forall (m; n) \in \mathbb{N}^2 \quad m \geq 1 \Rightarrow m^n \geq 1 + n(m-1)$

ليكن $(m; n) \in \mathbb{N}^2$ لدينا $m^n = ((m-1) + 1)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i (m-1)^i = 1 + n(m-1) + \sum_{i=2}^n C_n^i (m-1)^i$

و حيث أن $m-1 \geq 0$ فإن $m^n \geq 1 + n(m-1)$

2- نستنتج أن $\forall m \in \mathbb{N} \quad m \succ 1 \Rightarrow \forall p \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad m^n \succ p$

ليكن $m \in \mathbb{N}$ حيث $m \succ 1$

إذا وجدت n فإن $m^n \geq 1 + n(m-1)$

ليكن $p \in \mathbb{N}$

حسب أرخميدس يوجد n من \mathbb{N} حيث $n(m-1) \succ p-1$ أي $1 + n(m-1) \succ p$ إذن $m^n \succ p$

3- نبين أن $\forall b \in \mathbb{N} \quad b \succ 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists ! k \in \mathbb{N} \quad b^k \leq n < b^{k+1}$

$$A_n = \{k \in \mathbb{Z} / n < b^{k+1}\} \text{ نعتبر}$$

$$\text{حسب (2) } \forall b \in \mathbb{N} \quad b > 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k_n \in \mathbb{N} \quad b^{k_n+1} > b^{k_n} > n \quad \text{إذن } A_n \neq \emptyset$$

$$A_n \subset \mathbb{N} \text{ و منه } A_n \text{ يقبل أصغر عنصر } k_{n_0} \text{ أي أن } b^{k_{n_0}} \leq n < b^{k_{n_0}+1}$$

$$\text{لأن لو كان } b^{k_{n_0}} > n \text{ و } n \geq 2 \text{ فإن } b^{k_{n_0}} \geq 2 > 1 \text{ ومنه } k_{n_0} \geq 1 \text{ و بالتالي } k_{n_0} - 1 \geq 0$$

$$\text{وحيث } b^{(k_{n_0}-1)+1} > n \text{ فإن } k_{n_0} - 1 \in A_n \text{ وهذا يتناقض مع كون } k_{n_0} \text{ أصغر عنصر لـ } A_n$$

$$\text{لو أن } n = 1 \text{ فإن } k_{n_0} = 0 \quad (b^0 \leq 1 \leq b^{0+1})$$

2- تعريف

أساس أنظمة عد هو عدد الأرقام التي تستعمل لتمثيل الأعداد الصحيحة الطبيعية

أمثلة

- أساس أنظمة العد العشري هو 10. الأرقام المستعملة هي 0 و 1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6 و 7 و 8 و 9
- أساس أنظمة العد الاثنائي هو 2. الأرقام المستعملة هي 0 و 1
- أساس أنظمة العد الاثنى عشري هو 12. الأرقام المستعملة هي 0 و 1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6 و 7 و 8 و 9 و 10 و 11. نرمز في الكتابة لرقم 10 بـ α و لـ 11 بـ β
- أساس أنظمة العد الثماني هو 8. الأرقام المستعملة هي 0 و 1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6 و 7
- 3- أنظمة العد ذات الأساس b . ($b > 1$)

أ- تمهيدة

ليكن b عددا صحيحا طبيعيا حيث ($b > 1$)

لكل عدد صحيح طبيعي n يوجد k و r_k و q_k في \mathbb{N} حيث $n = b^k q_k + r_k$ و $0 \leq r_k < b^k$ و $0 \leq q_k < b$

البرهان

ليكن $(b; n) \in \mathbb{N}^2$ حيث ($b > 1$)

إذا كان $n = 0$ فإن نتيجة بديهية

إذا كان $n \in \mathbb{N}^*$ فإنه حسب النشاط التمهيدي $\exists ! k \in \mathbb{N} \quad b^k \leq n < b^{k+1}$

بإجراء القسمة الاقليدية للعدد n على b^k نحصل على $n = b^k q_k + r_k$ و $0 \leq r_k < b^k$ و $q_k \in \mathbb{N}$

لنبين أن $0 \leq q_k < b$

إذا كان $q_k \geq b$ ومنه $q_k b^k \geq b^{k+1}$ و بالتالي $n = b^k q_k + r_k \geq b^{k+1}$ و هذا يتناقض مع كون $n < b^{k+1}$

إذن $0 \leq q_k < b$

ب- حسب التمهيدة 1 لدينا $n = b^k q_k + r_k$ و $0 \leq r_k < b^k$ و $0 \leq q_k < b$

بتطبيق التمهيدة على r_k نحصل على $r_k = b^{k-1} q_{k-1} + r_{k-1}$ و $0 \leq r_{k-1} < b^{k-1}$ و $0 \leq q_{k-1} < b$ (لأن

$$r_k < b^k$$

نطبق التمهيدة على r_{k-1} وهكذا حت نصل الى r_1 فنحصل على

$$0 \leq q_{k-2} < b \text{ و } 0 \leq r_{k-2} < b^{k-2} \text{ و } r_{k-1} = b^{k-2} q_{k-2} + r_{k-2}$$

$$\vdots$$

$$0 \leq q_1 < b \text{ و } 0 \leq r_1 < b \text{ و } r_2 = b q_1 + r_1$$

$$q_0 = r_1 \text{ و } r_1 = 1 \times q_0$$

$$n = \sum_{i=0}^{i=k} q_i b^i \text{ بجمع جميع أطراف المتساويات نحصل على الكتابة في شكلها الوحيد}$$

حيث $0 \leq q_i < b$ و i تنتمي $\{1; 2; \dots; k\}$

ليكن b عددا صحيحا طبعيا حيث $(b > 1)$

لكل عدد صحيح طبيعي n يوجد عدد صحيح طبيعي k حيث $n = \sum_{i=0}^{i=k} q_i b^i$ بحيث $0 \leq q_i < b$

و i تنتمي $\{1; 2; \dots; k\}$ و $q_k > 0$ اذا كان $n > 0$

ملاحظة

الكتابة $n = \sum_{i=0}^{i=k} q_i b^i$ حيث $0 \leq q_i < b$ و i تنتمي $\{1; 2; \dots; k\}$ تبين أنه لتمثيل عدد صحيح طبيعي n في نظمة العد ذات الأساس b

نحتاج الى b رمز و نمثل العدد n في نظمة العد ذات الأساس b بكتابة $n = \overline{q_k q_{k-1} \dots q_0}_{(b)}$

أمثلة

* في نظمة العد العشري كتابة العدد 2703 هي $2703 = 2 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 0 \times 10 + 3$

* في نظمة العد الثنائي كتابة العددين 8 و 15 هي

$$\overline{1000} \quad 8 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2 + 0$$

$$\overline{1111} \quad 15 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1$$

* في نظمة العد الثماني

$$15 = \overline{17}_{(8)} \quad \text{ومنه} \quad 15 = 1 \times 8 + 7$$

$$131 = \overline{203}_{(8)} \quad \text{ومنه} \quad 131 = 2 \times 8^2 + 0 \times 8 + 3$$

ج- طريقة عملية لإيجاد تمثيل عدد صحيح طبيعي في نظمة عد ما

ليكن $b \in \mathbb{N} \quad b > 1$; $n \in \mathbb{N}$

لدينا

$$0 \leq r_0 < b \quad ; \quad n = bq_1 + r_0$$

$$0 \leq r_1 < b \quad ; \quad q_1 = bq_2 + r_1$$

$$0 \leq r_k < b \quad ; \quad q_k = bq_{k+1} + r_k$$

$$n \geq q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_q$$

بما أن المجموعة $A = \{q_1; q_2; \dots\}$ مكبورة في \mathbb{N} وغير فارغة فانه يوجد k بحيث $q_k = r_k$

ومنه

$$0 \leq r_0 < b \quad ; \quad n = bq_1 + r_0$$

$$0 \leq r_1 < b \quad ; \quad q_1 = bq_2 + r_1$$

$$0 \leq r_{k-1} < b \quad ; \quad q_{k-1} = bq_k + r_{k-1}$$

$$q_k = r_k$$

و بضرب طرفي المتساوية رقم i بالعدد b^i نحصل على

$$n = bq_1 + r_0$$

$$bq_1 = b^2 q_2 + br_1$$

$$b^i q_i = b^{i+1} q_{i+1} + b^i r_i$$

$$b^{k-1}q_{k-1} = b^k q_k + b^{k-1}r_{k-1}$$

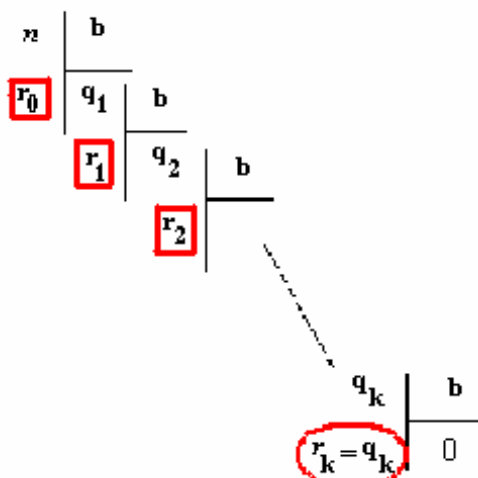
$$b^k q_k = b^k r_k$$

$$i \in \{1; 2; \dots; k\} \text{ و } 0 \leq r_i < b$$

$$n = \sum_{i=0}^{i=k} b^i r_i \text{ بجمع أطراف المتساويات نحصل على}$$

$$n = \overline{r_k r_{k-1} \dots r_1 r_0} \text{ إذا كان } r_k \neq 0 \text{ فان}$$

طريقة عملية



لتحديد تمثيل للعدد n في أنظمة العد ذات الأساس b
نحسب البواقي r_i ($0 \leq i \leq k$)

$$n = \overline{r_k r_{k-1} \dots r_1 r_0} (b)$$

مثال

لنبحث عن تمثيل للعدد 3254 في أنظمة العد الثماني ثم أنظمة العد الاثنا عشري

$$\begin{array}{r|l} 3254 & 12 \\ \hline & 271 \\ & \textcircled{7} \\ & 22 \\ & \textcircled{\alpha} \\ & 1 \\ & \textcircled{1} \\ & 0 \end{array}$$

$$3254 = \overline{1\alpha 72}_{(12)}$$

$$\begin{array}{r|l} 3254 & 8 \\ \hline & 406 \\ & \textcircled{6} \\ & 50 \\ & \textcircled{2} \\ & 6 \\ & \textcircled{6} \\ & 0 \end{array}$$

$$3254 = \overline{6266}_{(8)}$$

4- مقارنة عددين ممثلين في نفس النظام
خاصية

ليكن x و y ممثلين في نفس أنظمة العد بـ $x = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}_{(b)}$ و $y = \overline{c_m c_{m-1} \dots c_0}_{(b)}$
إذا كان $m > n$ فان $y > x$

خاصية

ليكن x و y ممثلين في نفس أنظمة العد بـ $x = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}_{(b)}$ و $y = \overline{c_n c_{n-1} \dots c_0}_{(b)}$
إذا كان $c_n = a_n$ $c_{n-1} = a_{n-1}$ \dots $c_{i+1} = a_{i+1}$ et $a_i \neq c_i$ فان ترتيب x و y هو نفس ترتيب a_i و c_i

5- تغيير أساس أنظمة عد

لتمثيل عدد x في أنظمة عد ذات الأساس b نمثله أولاً في أنظمة العد العشري و نحدد تمثيله في أنظمة عد ذات الأساس b

تمرين

هل توجد أنظمة العد ذات الأساس b حيث $\overline{xxx} \times \overline{xxx} = \overline{yyyyyy}$

ليكن x عدد صحيح طبيعي كتابته في نظام العد العشري هي $x = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$

$$x \equiv 0 \quad [4] \Leftrightarrow 4 \mid \overline{a_1 a_0}$$

$$x \equiv 0 \quad [5] \Leftrightarrow a_0 = 0 \quad \text{ou} \quad a_1 = 5$$

$$x \equiv 0 \quad [5] \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \in \{00; 25; 50; 75\}$$

$$x \equiv 0 \quad [3] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{i=n} a_i \equiv 0 \quad [3]$$

$$x \equiv 0 \quad [9] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{i=n} a_i \equiv 0 \quad [9]$$

$$x \equiv 0 \quad [11] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i a_i \equiv 0 \quad [11]$$