

رياضيات النجاح	الدوال الأصلية حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية
تمرين 1 :		
لدينا : $f(x) = \frac{3}{x^2} + \sqrt[3]{x} + (2x+1)^4 = -3 \times \left(\frac{-1}{x^2}\right) + x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \times 2(2x+1)^4$		
منه : $F(x) = -\frac{3}{x} + \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{10} (2x+1)^5$ أي : $F(x) = -3 \times \frac{1}{x} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}} x^{\frac{1+\frac{1}{3}}{3}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} (2x+1)^5$		
لدينا : $f(x) = x\sqrt{x} = x \times x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$ منه : $F(x) = \frac{1}{1+\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}+1} = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}$ أي : $F(x) = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x}$		
لدينا : $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} = -\frac{(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2}$ منه : $F(x) = \frac{-1}{x^2+x+1}$		
لدينا : $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+2} = \frac{1}{x^2+2x+1+1} = \frac{1}{(x+1)^2+1} = \frac{(x+1)'}{(x+1)^2+1}$ منه : $F(x) = \text{Arctan}(x+1)$		
لدينا : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3+x^2}} = \frac{1}{2} \frac{(3+x^2)'}{\sqrt{3+x^2}}$ منه : $F(x) = \sqrt{3+x^2}$		
لدينا : $f(x) = \frac{\text{Arctan } x}{1+x^2} = \text{Arctan } x \times \frac{1}{1+x^2} = \text{Arctan } x \times (\text{Arctan } x)'$ منه : $F(x) = \frac{1}{2} (\text{Arctan } x)^2$		
لدينا : $f(x) = \sin(5x+1) + \sin(x) \times \sin^2(x) = \sin(5x+1) + \sin(x) \times (1 - \cos^2(x)) = \sin(5x+1) + \sin(x) - \sin(x) \cos^2(x)$ $f(x) = \sin(5x+1) + \sin(x) + \cos^2(x) \times (\cos(x))'$ منه : $F(x) = \frac{-1}{5} \cos(5x+1) - \cos(x) + \frac{1}{3} \cos^3(x)$		
لدينا : $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{2}{2\sqrt{x}}$ منه : $F(x) = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$ أي : $F(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} x^{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}} + 2\sqrt{x}$		
لدينا : $f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{x^2+1} \times (x^2+1)'$ منه : $F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{2}} (x^2+1)^{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}$ أي : $F(x) = \frac{1}{3} (x^2+1) \sqrt{x^2+1}$		
لدينا : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+(\sqrt{x})^2} = 2 \frac{(\sqrt{x})'}{1+(\sqrt{x})^2}$ منه : $F(x) = 2 \text{Arctan}(\sqrt{x})$		
لدينا : $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$ منه : $F(x) = x - \text{Arctan}(x)$		
لدينا : $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{1+\sqrt{x}} \times (\sqrt{x})'$ منه : $F(x) = \frac{4}{3} (1+\sqrt{x}) \sqrt{1+\sqrt{x}}$ أي : $F(x) = 2 \times \frac{1}{1+\frac{1}{2}} (1+\sqrt{x})^{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}$		

تمرين 2 : $f(x) = x\sqrt{x+1}$

1 لدينا : $\forall x \in [-1; +\infty[(x+1)\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = x\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = x\sqrt{x+1} = f(x)$

بما أن : $f(x) = (x+1)^{\frac{3}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{2}}$ فإن الدوال الأصلية للدالة f هي على الشكل :

$$F(x) = \frac{1}{1+\frac{3}{2}} (x+1)^{1+\frac{3}{2}} - \frac{1}{1+\frac{1}{2}} (x+1)^{1+\frac{1}{2}} + \lambda \quad / \lambda \in \mathbb{R}$$

2 منه : $F(x) = \frac{2}{5}(x+1)^2 \sqrt{x+1} - \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + \lambda$

و لتكن $F_0(x)$ الدالة الأصلية للدالة f التي تنعدم في 0، إذن $F_0(0) = 0$ منه : $\frac{2}{5} - \frac{2}{3} + \lambda = 0$

منه : $\lambda = -\frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$ بالتالي : $F_0(x) = \frac{2}{5}(x+1)^2 \sqrt{x+1} - \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + \frac{4}{15}$

تمرين 3 : $f(x) = \left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)^2$

1 لدينا : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)^2 = \frac{x^2-2x+1}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2} - \frac{2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{2x}{(x^2+1)^2}$

منه : $b = -2$ و $a = 1$

الدوال الأصلية للدالة f هي على الشكل : $F(x) = \text{Arctan } x + \frac{1}{x^2+1} + \lambda \quad / \lambda \in \mathbb{R}$

2 و لتكن $F_0(x)$ الدالة الأصلية للدالة f التي تحقق $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_0(x) = 0$

منه : $\frac{\pi}{2} + 0 + \lambda = 0$ منه : $\lambda = -\frac{\pi}{2}$ بالتالي : $F_0(x) = \text{Arctan } x + \frac{1}{x^2+1} - \frac{\pi}{2}$

تمرين 4 : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ ، F الدالة الأصلية لـ f والتي تنعدم في 0

نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $h(x) = F(x) - \frac{1}{2}x^2$

لدينا : $\forall x \in \mathbb{R} \quad h'(x) = f(x) - x = \sqrt{x^2+1} - x$

1 وبما أن : $x^2+1 > x^2$ فإن : $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2}$ أي : $\sqrt{x^2+1} > |x|$ وحيث أن : $|x| \geq x$ فإن : $\sqrt{x^2+1} > x$ ، ما يعني أن : h تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$

بالتالي : $x \geq 0 \Rightarrow h(x) \geq h(0) = 0$ بالتالي : $\forall x \in [0, +\infty[\quad F(x) \geq \frac{1}{2}x^2$

2 بما أن : $\forall x \in [0, +\infty[\quad F(x) \geq \frac{1}{2}x^2$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x^2 = +\infty$ فإن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$

وبما أن : $\forall x \in [0, +\infty[\quad \frac{F(x)}{x} \geq \frac{1}{2}x$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x = +\infty$ فإن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$

و هذا يعني أن منحنى الدالة F يقبل فرعاً شامخاً باتجاه محور الأرتايب

نعتبر الدالة العددية p المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $p(x) = F(-x) + F(x)$ ، لدينا :

3 إذن : p دالة ثابتة ، إذن : $\exists C \in \mathbb{R} \quad / \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad p(x) = C$ منه : $\forall x \in \mathbb{R} \quad F(-x) + F(x) = C$

منه : $F(0) + F(0) = C$ إذن : $C = 0$ وبالتالي : $\forall x \in \mathbb{R} \quad F(-x) = -F(x)$

وحيث أن : $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$ فإن F دالة فردية

4	بما أن: $\forall x \in \mathbb{R} F'(x) = f(x) > 0$ فإن F تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$.
5	معادلة مماس الدالة F في الصفر هي: $(\Delta): y = F'(0)(x-0) + F(0)$ أي: $(\Delta): y = f(0)x = x$
6	لدينا: $\forall x \in \mathbb{R} F'(x) = f(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ وحيث أن المشتقة الثانية تنعدم وتغير إشارتها فقط في الصفر، فنقط انعطاف منحنى الدالة F هي النقطة $O(0, 0)$
7	