

التمرين الأول

أحسب التكاملات التالية :

$$\int_{\pi^2}^1 \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx , \quad \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}} dx , \quad \int_1^2 \frac{2x-1}{(3x^2-3x+1)^2} dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx , \quad \text{حيث } x \in \mathbb{R}^* \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(tx) dt , \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x dx$$

$$\int_0^1 \frac{4t}{(t^2+1)(t+1)^2} dt , \quad \int_0^2 \frac{1}{x^2+2x+4} dx , \quad \int_0^1 \frac{x^4}{x^2+1} dx , \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos 3x dx$$

التمرين الثاني

نعتبر التكامل التاليين : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \sin 2x dx$ و $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos^2 x dx$

(1) أحسب كل من التكاملين $I - J$ و $I + J$

(2) استنتج قيمة كل من I , J

التمرين الثالث

باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب ما يلي :

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\arctan x}{x^3} dx , \quad \int_0^{\pi} x \sin x dx , \quad \int_1^{\sqrt{3}} x \arctan x dx$$

(أحسب مشتقة الدالة $x \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$) $\int_{-\sqrt{3}}^0 \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$

التمرين الرابع

باستعمال مكاملة بتغيير المتغير حدد التكاملات التالية :

$$x = \sqrt{t^2+1} \text{ ضع } \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}} dt$$

$$t = \tan \frac{x}{2} \text{ ضع } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x} \quad t = \sqrt{x}+1 \text{ ضع } \int_1^4 \frac{1}{(1+\sqrt{x})^3} dx , \quad t = \sqrt{x} \text{ ضع } \int_0^3 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx$$

$$x = 2 \sin t \text{ ضع } \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx , \quad t = \tan x \text{ ضع } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\sin 2x}$$

التمرين الخامس

نعتبر التكامل $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ لكل عدد طبيعي n

(1) أحسب W_0 ; W_1

(2) أ- بين أن $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) ثم استنتج $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx$ و $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx$

ب- أحسب W_{2n} بدلالة n

(3) بين أن المتتالية $(W_n)_n$ تناقصية و استنتج أنها متقاربة

(4) بين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$

(5) أ- بين أن $(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

ب- استنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2n} W_n = \sqrt{\pi}$