

التمرين رقم 1

أحسب التكاملات التالية : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 2x \, dx$, $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} dx$, $\int_1^{\ln 3} \frac{1}{x^2} e^{\frac{2}{x}} dx$, $\int_1^2 x e^{x^2} dx$,
 $\int_{-1}^0 \frac{x^4}{x^2 + 1} dx$, $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$, $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{t}{(1+t^2)^3} dt$, $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$,

التمرين رقم 2

باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب ما يلي : $\int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$, $\int_0^1 x \ln(x+1) dx$, $\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx$,
 $\int_1^2 \frac{\arctan x}{x^2} dx$, $\int_1^2 (3-2x) \ln x \, dx$, $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$ (حدد مشتقة $x \rightarrow \sqrt{x^2+1}$)

التمرين رقم 3

باستعمال تغيير المتغير أحسب ما يلي : $\int_0^1 \frac{x^3}{(x^2+1)^3} dx$ ضع $t = x^2$, $\int_1^2 \frac{\sqrt{2t-1}}{t} dt$ ضع $x = \sqrt{2t-1}$,
 $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$ ضع $t = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$, $\int_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ ضع $t = \sqrt{x-1}$,
 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$ ضع $t = \tan \frac{x}{2}$, $\int_0^1 x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$ ضع $x = \cos t$ و $t \in [0, \pi]$

التمرين رقم 4

نعتبر التكاملين $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$ و $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$,
 (1) بين أن $I = J$ يمكن وضع $t = \frac{\pi}{2} - x$
 (2) استنتج قيمة كل من I , J

التمرين رقم 5

(1) تحقق أن $(1-x)^3 + (1+x)^3 = 2 + 6x^2$
 (2) استنتج قيمة التكامل : $\int_0^{\pi} (\sin^6 t + \cos^6 t) dt$

التمرين رقم 6

(1) تحقق أن $(\forall x \in \mathbb{R}) \frac{1}{(e^x+1)^2} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$
 (2) أحسب التكامل : $I = \int_0^1 \frac{1}{(e^x+1)^2} dx$

3) أ- حدد دالة أصلية للدالة $x \rightarrow \frac{e^x}{(e^x + 1)^3}$

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء حدد $J = \int_0^1 \frac{x e^x}{(e^x + 1)^3} dx$

النمرين رقم 7

لكل عددين طبيعيين p, q نضع $I(p, q) = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt$

1) قارن $I(p, q)$ و $I(q, p)$

2) بين العلاقة $I(p, q) = \frac{p}{q+1} I(p-1, q+1)$

3) أحسب $I(0, n)$ و استنتج $I(p, q)$

النمرين رقم 8

لتكن f, g دالتين متصلتين على مجال $[a, b]$ و بحيث $g(x) > 0$ ($\forall x \in [a, b]$)

بين أن $(\exists c \in [a, b]) \int_a^b f(x) g(x) dx = f(c) \times \int_a^b g(x) dx$

النمرين رقم 9

1) حدد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = e^x$ على المجال $[-1, 1]$

2) حدد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = \sin x$ على المجال $[0, \pi]$

النمرين رقم 10

نعتبر التكاملين $I = \int_{-1}^1 t \arctan t dt$ و $J = \int_{-1}^1 \frac{t \arctan t}{1+e^t} dt$

1) أحسب I

2) بين أن $J = \int_{-1}^1 \frac{e^t t \arctan t}{1+e^t} dt$

3) استنتج أن $I = 2J$ ثم حدد قيمة J

النمرين رقم 11

1) بين أن $(\forall t \in \mathbb{R}^+) \quad 1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq t$

2) استنتج أن $(\forall x > 0) \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

النمرين رقم 12

نضع $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n

1) بين أن $(\forall k \in \mathbb{N}^*) \quad \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$

2) بين أن $U_n \geq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

التمرين رقم 13

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \text{ نضع } \mathbb{N}^* \text{ لكل } n$$

$$(1) \text{ بين أن } \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

$$(2) \text{ استنتج أن } \int_1^n \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \leq S_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

$$(3) \text{ بين أن } \left(\frac{S_n}{n^{\frac{2}{3}}} \right)_{n \geq 1} \text{ متقاربة وحدد نهايتها } a$$

$$(4) \text{ نضع } U_n = S_n - an \text{ بين أن } (U_n)_{n \geq 1} \text{ متتالية محدودة و أنها متقاربة}$$

التمرين رقم 14

$$w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{4e^{\frac{3k}{n}} - 1}{2e^{\frac{3k}{n}} + 1} \text{ و } a_n = \int_0^1 \frac{h(t)}{1+nt} dt \text{ نضع } h(x) = \frac{1}{3}(2e^{2x} + e^{-x})$$

$$(1) \text{ بين أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \text{ واستنتج } (\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 \leq a_n \leq h(1) \int_0^1 \frac{dt}{1+nt}$$

$$(2) \text{ بين أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ln\left(\frac{2e^3 + 1}{3e}\right) \text{ واستنتج أن } (\forall n \in \mathbb{N}^*) : w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{h'\left(\frac{k}{n}\right)}{h\left(\frac{k}{n}\right)}$$

التمرين رقم 15

$$(2) \text{ لتكن } u \text{ دالة متصلة و فردية على المجال } [-a, a] \text{ بحيث } a \in \mathbb{R}^{+*}$$

$$\text{أ- أثبت أن : } \int_{-a}^0 u(t) dt = - \int_0^a u(t) dt \text{ واستنتج أن } \int_{-a}^a u(t) dt = 0$$

$$\text{ب- لتكن } g \text{ دالة متصلة على } [0,1] \text{ بين أن}$$

$$\text{و أن } \int_0^\pi xg(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi g(\sin x) dx$$

$$\text{ج- احسب } \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$(2) \text{ نضع } u_n = \prod_{k=1}^{k=n} \left(1 + \left(\frac{k}{n} \right)^{\frac{k}{n^2}} \right) \text{ أحسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln(u_n)) \text{ ثم استنتج } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

التمرين رقم 16

$$(1) \text{ بين أن : } (\forall t \in \mathbb{R}) \frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} = \frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{3+t^2} + \frac{1}{3+t^2}$$

$$(2) \text{ بين أن : } \int_0^{\alpha} \frac{1}{3+t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arc} \tan \left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}} \right) \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$$

$$(3) \text{ نعتبر الدالة العددية } F \text{ المعرفة على } [0, \pi] \text{ بما يلي : } F(x) = \int_0^x \frac{1 + \sin U}{2 + \cos u} du$$

أ- بين أن F قابلة للاشتقاق على $[0, \pi]$

$$\text{ب- باستعمال مكاملة بتغيير المتغير } t = \tan \frac{u}{2} \text{ بين أن : } F(x) = 2 \int_0^{\tan \frac{x}{2}} \frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} dt \quad \forall x \in [0, \pi]$$

$$\text{ج- باستعمال السؤالين 1 و 2، بين أن : } F(x) = \ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \right) + \ln \left(\frac{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}{3 + \tan^2 \frac{x}{2}} \right) \quad \forall x \in [0, \pi]$$

$$\text{د- باستعمال اتصال الدالة بين أن } \int_0^{\pi} \frac{1 + \sin U}{2 + \cos u} du = \ln 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

التمرين رقم 17

$$(1) \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^* \text{ نضع } I_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

$$\text{أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن } (\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) : I_n = \frac{1}{(n-1)2^n} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$$

$$\text{ب- أحسب } I_1 \text{ واستنتج } I_3$$

$$(2) \text{ أ- حدد الأعداد الحقيقية } a, b, c \text{ بحيث :}$$

$$(\forall t \in [0, 1]) : \frac{(1-t^2)^3}{(1+t^2)^3(1+3t^2)} = \frac{a}{1+3t^2} + \frac{b}{1+t^2} + \frac{ct}{(1+t^2)^3}$$

$$\text{ب- أحسب التكامل } J = \int_0^1 \frac{(1-t^2)^3}{(1+t^2)^3(1+3t^2)} dt$$

$$\text{ج- بوضع } t = \tan \frac{x}{2} \text{ أحسب التكامل } K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{2 - \cos x} dx$$

التمرين رقم 18

$$\text{لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^* \text{ نضع } I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$$

$$(1) \text{ بين أن } (I_n)_n \text{ تناقصية}$$

$$(2) \text{ أ- احسب التكامل } I_1$$

$$\text{ب- بين أن } (\forall n \in \mathbb{N}^*) I_{n+1} = e - (n+1)I_n \text{ ثم استنتج } I_2 ; I_3$$

$$(3) \text{ أ- بين أن } I_n \geq 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\text{ب- بين أن } I_n \leq \frac{e}{n+1} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \text{ ثم حدد نهاية } I_n$$

$$\text{ج- أحسب } nI_n + (I_n + I_{n+1}) \text{ ثم حدد نهاية } nI_n$$

التمرين رقم 19

نضع $I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-x)^2} dx$ و $I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - x\right)^n \frac{1}{(1-x)^{n+2}} dx$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

1) أحسب I_0

2) باستعمال مكاملة بتغيير المتغير $t = 1 - x$ أحسب I_1

3) أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $I_n = \frac{-1}{2^n(n+1)} + \frac{n}{n+1} I_{n-1}$

ب- بين أن $I_n = \frac{1}{2^n(n+1)}$

التمرين 20

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = (1-x)e^{2x}$

1) أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) أدرس رتبة الدالة f و أنجز جدول التغيرات

3) بين المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف I يتم تحديدها

4) أرسم المنحنى (C_f)

5) أحسب مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C_f) محور الأفصيل والمستقيمين $x = 0$; $x = 1$

(II) لكل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$ نضع $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{2x} dx$

1) أ- بين أن $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+1}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

ب- بين أن $2I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$

2) نضع $U_n = \frac{2^n}{n!} I_n$ لكل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$

أ- بين بالترجع أن $\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) واستنتج أن $U_n \leq \frac{2e^2}{n+1}$ لكل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$

ب- أحسب النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

3) أ- بين أن $U_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + U_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)

ب- بين أن لكل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$: $U_n = \frac{1}{2} \left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^k}{k!} \right)$

ج- استنتج النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^k}{k!}$