

الأستاذ : علي الشريف قسم : الثانية باكوريا علوم رياضية	تمارين درس : حساب التكامل الصفحة 1	دروس الدعم و التقوية مادة الرياضيات
$K = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\pi-2}{4}} (x+1) \sin(2x+1) dx$ $L = \int \frac{1}{-x^2 + 2x + 5} dx \quad (t = \frac{x+1}{2})$ التمرين رقم 3 : نعتبر الدالة : $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 3}{(x+1)(x-2)^2}$ أثبت أن لكل x من IR ($x \neq 2$; $x \neq -1$) $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x-2)^2}$$\int_0^1 f(x) dx$ أحسب : التمرين رقم 4 : (1) تحقق أن : $\forall t \in IR - \left\{ -2, \frac{1}{2} \right\} :$ $\frac{t}{2t^2 + 3t - 2} = \frac{1}{5} \left(\frac{2}{t+2} + \frac{1}{2t-1} \right)$ (2) أحسب التكامل التالي : $\int_1^4 \frac{t}{2t^2 + 3t - 2} dt$ (3) استنتج قيمة التكامل : $\int_0^5 \frac{1}{2x + \sqrt{3x+1}} dx$ باستعمال مكاملة بتغيير المتغير ($t = \sqrt{3x+1}$) التمرين رقم 5 : (1) باستعمال المكاملة بتغيير المتغير و ذلك بوضع $u=2x$ أحسب التكامل : $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4x^2 + 1} dx$ (2) أحسب التكامل : $J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(4x^2 + 1)^2} dx$ (3) استنتج قيمة التكامل : $K = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4x^2 + x + 1}{(4x^2 + 1)^2} dx$ التمرين رقم 6 : (1) حدد الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث يكون لكل x من : $IR - \{-1; 0; 1\}$ $\frac{1}{x(x^2 - 1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$ (2) حدد دالة أصلية , على المجال $[1, +\infty[$, للدالة f المعرفة على $[1, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{x}{(x^2 - 1)^2}$ (3) أحسب : $I = \int \frac{x \ln x}{2(x^2 - 1)^2} dx$ (م بالأجزاء)	التمرين رقم 1 : أحسب التكاملات التالية : 1) $\int_0^2 (1 - x-1 ^3) dx$; 2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos x (\sin x + \sin^3 x) dx$ 3) $\int_{-1}^1 (x - 2x^3) dx$; 4) $\int_0^{\pi} \cos^3 x \sin x dx$ 5) $\int_0^1 x^2 \sqrt{x} dx$; 6) $\int_1^2 \frac{x+1}{x} dx$ 7) $\int_1^2 (x^3 - \frac{1}{x^2} + 2) dx$; 8) $\int_0^1 \frac{x}{(x^2 + 1)^3} dx$ 9) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx$ ($t = \sqrt{2x+1}$) 10) $\int_0^{\sqrt{3}} t \sqrt{1+t^2} dt$ 11) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}} dt$ 12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t) dt$: $[\sin^3(x) = \sin x (1 - \cos^2(x))]$ 13) $\int_{-1}^1 (x+1)^2 dx$ 14) $\int_1^4 \frac{1+x}{\sqrt{x}} dx$ 15) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x - \frac{\pi}{3}) dx$ 16) $\int_1^e x^5 \ln x dx$ 17) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$; ($x = \sin t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$) 18) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot \sin^3(x) dx$ 19) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \cos(3x) dx$ 20) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx$; ($u = x^2$) 21) $\int_0^1 (x^2 + x) dx$ 22) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(x) dx$; 23) $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2} dx$; ($t = x+1$) 25) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(x + \frac{\pi}{6}) dx$; 26) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (x+1) \cos(3x) dx$ التمرين رقم 2 : أحسب التكاملات I و J و K و L حيث : $I = \int_1^2 \frac{x^4 - 3x^3 + 2}{x^2} dx$$J = \int_{-2}^0 (x+1) \sqrt{x^2 + 2x + 5} dx$	

الأستاذ : علي الشريف قسم : الثانية باكوريا علوم رياضية	تمارين درس : حساب التكامل الصفحة 2	دروس الدعم و التقوية مادة الرياضيات
---	---------------------------------------	--

التمرين رقم 7 :
أحسب التكاملات التالية :

(1) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 2x dx$ (2)

(3) $K = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+2} dx$, $D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos 3x dx$ (4)

(5) $H = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ (ضع : $x = \sin t$: $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$)

(6) $I = \int_0^2 \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+3x+2} dx$ (ضع : $t = \sqrt{x+1}$ وضع)

(7) $J = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$, $k = \int_0^1 \frac{\text{Arctan} x}{1+x^2} dx$ (8)

(9) $H = \int_0^1 \text{Arc tan } x dx$ (المكاملة بالأجزاء)

(10) $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+5} dx$, $K = \int_0^{\frac{1}{2}} \text{Arc sin } t dt$ (11)

(12) $K = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\tan^3 x}$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^3 x dx$ (13)

(14) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx$, $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x \sin 2x dx$

التمرين رقم 8 :

(1) بين : $(\forall y \in \mathbb{R}_+^*) : \frac{y^3}{y+1} = (y+1)^2 - 3(y+1) - 3 - \frac{1}{y+1}$

ب- استنتج حساب التكامل : $I = \int_1^2 \frac{y^3}{y+1} dy$

(2) أحسب التكامل : $J = \int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$ ($y = \sqrt[6]{x}$)

التمرين رقم 9 :

نعتبر الدالتين : $u(x) = \sqrt{1+x^2}$ و $v(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(1) لكل x من $\mathbb{R}$, أحسب : $u'(x)$ و $v'(x)$

(2) α من $\mathbb{R}$ نضع : $I(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{x^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx$

باستعمال التكامل بالأجزاء أحسب : $I(\alpha)$

(3) أحسب التكامل : $J = \int_1^e \frac{(\ln t)^3}{t(1+\ln t)^2 \sqrt{1+(\ln t)^2}} dt$

التمرين رقم 10 :

نعتبر الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = \sin^4(x)$

(1) عبر عن $\sin^2(x)$ و $\cos^2(x)$ بدلالة $\cos(2x)$

(2) عبر عن $\sin^4(x)$ بدلالة $\cos(2x)$ و $\cos(4x)$

(3) أحسب : $\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(x) dx$

التمرين رقم 11 :
أ- بين أن

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + x + 1 = \frac{3}{4} \left[1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right]$$

ب- بين أن : $I = \int_{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}^1 \frac{1}{x^2+x+1} dx = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{12}$

(ضع : $t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$)

(2) أ- نضع لكل x من $\mathbb{R}^*$: $A = \frac{1}{x(x^2+x+1)}$

بين أن : $A = \frac{1}{x} - \frac{2x+1}{2(x^2+x+1)} - \frac{1}{2(x^2+x+1)}$

ب- أحسب التكامل : $J = \int_{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}^1 \frac{1}{x(x^2+x+1)} dx$

(3) أحسب : $K = \int_{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}^1 \frac{(2x+1)\ln(x)}{(x^2+x+1)^2} dx$ (مبالأجزاء)

التمرين رقم 12 :
لكل عدد صحيح طبيعي n نعتبر التكاملين :

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos(x) dx \text{ و } I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin(x) dx$$

(1) أحسب : I_0 و J_0

(2) أبين أن $n \in \mathbb{N}^* : I_n + nJ_n = 1$ و $-nI_n + J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}}$ (مبالأجزاء)

ب- استنتج I_n و J_n بدلالة n .

(3) أحسب النهايتين : $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

التمرين رقم 13 :
لكل عدد ص.ط. n نعتبر :

$$I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin(x) dx$$

(1) بين أن : $I_n = (-1)^n \cdot \frac{e^{-n\pi} + 1}{2}$ (مبالأجزاء)

(2) بين أن $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية محددا أساسها و حدها الأول

التمرين رقم 14 :
نعتبر $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة ب :

$$u_n = \int_1^2 e^{-nt^2} dt$$

(1) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} ; \forall t \in [1,2] : 0 \leq e^{-nt^2} \leq e^{-nt}$

(2) استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq \frac{e^{-n} - e^{-2n}}{n}$

(3) استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

الأستاذ : علي الشريف قسم : الثانية باكالوريا علوم رياضية	تمارين درس : حساب التكامل الصفحة 3	دروس الدعم و التقوية مادة الرياضيات
---	---------------------------------------	--

التمرين رقم 15:

نعتبر المتتالية $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة ب :

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t} dt, \quad I_1 = \int_0^1 t \sqrt{1+t} dt, \quad \dots, \quad I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t} dt, \quad \dots$$

(1) أحسب I_0 , ثم أحسب I_1 باستعمال المكاملة بالأجزاء .

(2) قارن t^n و t^{n+1} بحيث $0 \leq t \leq 1$ ثم إستنتج رتبة المتتالية I_n .

(3) باستعمال تأطير مناسب للعدد $\sqrt{1+t}$ بين أن :

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$$

(4) - بين أن لكل t من المجال $[0;1]$:

$$0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leq \frac{1}{2}(1-t)$$

ثم إستنتج أن :

$$\frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n^2} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$$

ب- حدد : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

التمرين رقم 16:

ليكن m و n عدد ين صحيحين طبيعيين .

نضع :

$$I(m; n) = \int_0^1 t^m (1-t)^n dt$$

(1) أحسب : $I(m; 0)$

(2) بين أن $n \geq 1$:

$$I(m; n) = \frac{n}{m+1} I(m+1; n-1)$$

(3) إستنتج أن :

$$I(m; n) = \frac{m!n!}{(m+n)!} I(m+n; 0)$$

ثم :

$$I(m; n) = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

التمرين رقم 17:

نعتبر : $J_n = \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n dt$ و $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n dx$

(1) أحسب I_0 و I_1 . ثم عبر عن I_{n+2} بدلالة I_n .

(2) أحسب J_0 و J_1 . ثم عبر عن J_{n+2} بدلالة J_n .

التمرين رقم 18:

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع :

$$J_n = \int_1^e \ln(x)^n dx$$

(1) - بين أن $\forall n \in \mathbb{N} : (\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$ $\forall x \in]1; e[$

ب- إستنتج رتبة المتتالية (J_n) .

ت- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : J_n > 0$

ثم إستنتج أن المتتالية (J_n) متقاربة .

(2) أ- أحسب : J_1 .

ب- بين أن : $\forall n \neq 0, J_{n+1} = e - (n+1).J_n$ م.ب.الأجزاء

ت- إستنتج قيم : J_4, J_3, J_2

ثم أعط قيم مقربة لكل منها إلى 10^{-3} .

(3) - بين أن : $\forall n \neq 0 : e \rangle (n+1).J_n$

ثم إستنتج نهاية المتتالية (J_n)

ب- ما هي قيمة : $(J_n + J_{n+1})$

إستنتج نهاية المتتالية $(n.J_n)$

التمرين رقم 19:

لكل ع. ص. ط. n نعتبر : $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$

(1) أحسب : $I_0 = \int_1^e x^2 dx$

(2) باستعمال المكاملة بالأجزاء أحسب : I_1

(3) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : 3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$

(4) استنتج : I_2

(5) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : I_n \geq 0$

(6) استنتج من (3) أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : I_n \leq \frac{e^3}{n+1}$

(7) أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

التمرين رقم 20:

نعتبر $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بحيث : $u_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$

(1) أحسب : u_0 و u_1

(2) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$

(3) أدرس نهاية المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

التمرين رقم 21:

نعتبر n عدد ص. نسبي و x حقيقي بحيث $x \geq 1$ و $n \neq -1$

(1) أ- أحسب : $I_n(x) = \int_1^x t^n (\ln t) dt$ (م.ب.الأجزاء)

ب- إستنتج : $J_n(x) = \int_1^x t^n (\ln t)^2 dt$

(2) أ- أحسب : $I_n(e) - J_n(e)$

ب- أحسب النهاية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n(e) - J_n(e)}{e^{n+1}}$

التمرين رقم 22:

نعتبر التكاملين :

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx \quad \text{و} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

(1) أحسب $I+J$ و $I-J$.

(2) استنتج قيمة كل من I و J.

الأستاذ : علي الشريف	تمارين درس : حساب التكامل	دروس الدعم و التقوية
قسم : الثانية باكالوريا علوم رياضية	الصفحة 4	مادة الرياضيات

التمرين رقم 23:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_n(x) = \frac{\sin(2(n+1)x)}{\sin x} ; n \in \mathbb{N} \text{ و } x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[\\ f_n(0) = 2n+2 \end{array} \right. \quad \text{نعتبر:}$$

$$\text{نضع: } u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx$$

$$(1-A) \text{ بين أن } f_n \text{ متصلة على } \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\text{استنتج أن المتتالية } (u_n) \text{ معرفة على } \mathbb{N}$$

$$(2) \text{ بين أن: } u_{n+1} - u_n = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$$

$$(3) \text{ أحسب } u_0 \text{ و } u_1 \text{ و } u_2$$

$$(1-B) \text{ بين أن } u_n = 2 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

$$(2) \text{ أحسب } \int_0^1 dx \text{ و } \int_0^1 x^{2k} dx \text{ من أجل } k \text{ في } \mathbb{N}^*$$

$$\text{استنتج أن: } u_n = 2 \int_0^1 \frac{1 - (-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2} dx$$

$$(3) \text{ بين أن } \left| u_n - 2 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \right| \leq \frac{2}{2n+3}$$

$$\text{استنتج } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

التمرين رقم 24:

$$\text{لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^* \text{ نضع } I_n = \frac{1}{2^{n+1} n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}} dt$$

$$(1) \text{ احسب } I_1$$

$$(2) \text{ بين أن: } \forall n \in \mathbb{N}^*: I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1} (n+1)!}$$

$$(3) \text{ استنتج أن: } \forall n \in \mathbb{N}^*: \sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{2^n n!} + I_n$$

$$\text{بين أنه يوجد } A \text{ في } \mathbb{R} \text{ بحيث: } 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n n!} A$$

$$\text{و استنتج: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{2^n n!} \right)$$

التمرين رقم 25:

$$(1) \text{ احسب مشتقة } f: \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$(2) \text{ } n \in \mathbb{N} \text{ } J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2} dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} \text{ و } I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\text{أحسب } I_0 \text{ و } I_1$$

$$(3) \text{ بين أن } \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \text{ و } (I_n)_{n \geq 0} \text{ متقاربة و حدد نهايتها.}$$

$$(4) \text{ حدد } \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$$

$$(5) \text{ بين أن } \forall n \in \mathbb{N}: I_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \frac{1}{n+1} J_n$$

$$\text{استنتج } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n I_n)$$

التمرين رقم 26:

$$(1) \text{ لنكن } Q_{n-2} (n > 2 \text{ و } n \in \mathbb{N}) \text{ (متغير } t \text{) الدالة المعرفة ب: } Q_{n-2}(t) = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^{n-2} t^{n-2}$$

$$\text{بين أن: } \forall t \in \mathbb{R} - \{-1\}: Q_{n-2}(t) = \frac{1 - (-1)^{n-1} t^{n-1}}{1+t}$$

$$\text{استنتج أن } \forall t \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^{n-2} t^{n-2} + (-1)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{1+t}$$

$$\text{و أن: } \forall x \in [0,1]: \ln(1+x) = P_{n-1}(x) + (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt$$

$$\text{حيث: } P_{n-1}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-2} \frac{x^{n-1}}{n-1}$$

$$(2) \text{ أ } \varphi \text{ دالة معرفة ب: } \varphi(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \text{ } \forall x \in]0,1[$$

$$\text{بين أن } \varphi \text{ تقبل تمديدا بالإتصال في } 0^+ \text{ الدالة } f \text{ بحيث:}$$

$$\begin{cases} \forall x \in]0,1[: f(x) = \varphi(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

$$(ب) \text{ بين أنه: } x - \ln(1+x) < 0 \text{ } \forall x > 0$$

$$\text{و استنتج أن: } \forall x > 0: f(x) \leq 1$$

$$(ج) \text{ نضع: } L = \int_0^1 f(x) dx$$

$$\text{بين أنه: } \forall n \in \mathbb{N}^*: 0 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{n}$$

$$\text{و حدد: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx = L \text{ ثم بين أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{n}$$

$$(3) \text{ أ } \text{بين أن } \forall x \in [0,1]: \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt \leq \int_0^x t^{n-1} dt$$

$$\text{و استنتج أن } \forall x \in [0,1]: \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt \leq \frac{1}{n}$$

$$\text{و أن: } -\frac{1}{nx} \leq f(x) - \frac{P_{n-1}(x)}{x} \leq \frac{1}{nx}$$

$$(II) \begin{cases} \int_0^1 f(x) dx + \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) + S_n\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n(1) \\ S_n(1) \leq \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) + S_n\left(\frac{1}{n}\right) \end{cases} \text{ بين أن:}$$

$$\forall n \geq 2 \text{ } S_n(x) = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^3} - \dots + (-1)^{n-2} \frac{x^{n-1}}{(n-1)^2}$$

$$(ب) \text{ بين أن: } \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1]: \frac{x^p}{p^2} \geq \frac{x^{p+1}}{(p+1)^2}$$

$$\text{لاحظ أن } S_4(x) = \left(x - \frac{x^2}{2^2}\right) + \frac{x^3}{3^3}, S_3(x) = \left(x - \frac{x^2}{2}\right), S_2(x) = x$$

$$x - S_5(x) = \left(\frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{3^2}\right) + \frac{x^4}{4^2}, x - S_4(x) = \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{3^2}, x - S_3(x) = \frac{x^2}{2^2}$$

$$\text{حدد } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n\left(\frac{1}{n}\right) \text{ (بين أن } \uparrow \text{)}$$

$$(ج) \text{ استنتج أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(1) = \int_0^1 f(x) dx$$

الأستاذ : علي الشريف قسم : الثانية باكالوريا علوم رياضية	تمارين درس : حساب التكامل الصفحة 5	دروس الدعم والتقوية مادة الرياضيات
---	---------------------------------------	---------------------------------------

التمرين رقم 27:

(A) (1) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) بحيث:

$$\begin{cases} u_1 \\ u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}; n \neq 0 \\ v_1 = 1 \\ v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1)^n}, n \neq 0 \end{cases}$$

(a) حدد a و b في $\mathbb{R}$: $\forall n \in \mathbb{N}^*: \frac{1}{(n-1)n} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n}$
استنتج v_n بدلالة n .

(b) بين أن (u_n) تزايدية و أن $u_n \leq v_n$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(B) (1) لكل t من $[0, \pi]$ و لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^n \sin(kt) \quad \text{و} \quad C_n(t) = \sum_{k=1}^n \cos(kt)$$

احسب $C_n(t) + iS_n(t)$.

$$\begin{cases} \forall t \in]0, \pi]: C_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right) \cos\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin \frac{t}{2}} \\ C_n(0) = n \end{cases}$$

استنتج أن:

(b) هل الدالة C_n متصلة على $[0, \pi]$ ؟

(2) تحقق من أن: $\forall t \in]0, \pi]: 1 + 2C_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin \frac{t}{2}}$

و بين أن الدالة من $[0, \pi]$ نحو $\mathbb{R}$: $f(t) = 1 + 2C_n(t)$ تقبل تمديدا g_n بالإتصال على $[0, \pi]$.

(3) بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}^*: \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos nt \, dt = \frac{1}{n^2}$

و استنتج أن: $u_n = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) C_n(t) \, dt$

(4) احسب $\int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) dt$

وبين أن: $\forall n \in \mathbb{N}^*: \frac{\pi^2}{6} - u_n = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) g_n(t) \, dt$

(C) نعتبر الدالة:

$$\begin{cases} f(t) = \frac{t - \frac{t^2}{2\pi}}{\sin \frac{t}{2}}, 0 < t \leq \pi \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

(1) بين أن f متصلة على $[0, \pi]$ و أنه يوجد M في $\mathbb{R}$.

بحيث: $\forall t \in [0, \pi]: 0 \leq f(t) \leq M$

(2) ليكن α عنصرا من $]0, \pi[$.

(a) بين أن $\forall n \in \mathbb{N}^*: \left| \int_0^{\alpha} f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt \right| \leq \alpha M$.

(b) بين أن f ق.ل.ل. على $[\alpha, \pi]$ و f' متصلة على $[\alpha, \pi]$

و أنه يوجد M' في $\mathbb{R}$ بحيث:

$$\forall t \in [\alpha, \pi], |f'(t)| \leq M'$$

(c) نضع $I_n = \int_{\alpha}^{\pi} f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt$ في $\mathbb{N}$.
بين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ (استعمال بالتكامل بالأجزاء)

(3) استنتج مما سبق أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi^2}{6} - u_n\right) = 0$

التمرين رقم 28:

$F(x)$ معرفة على $\mathbb{R}^{**}$ ب: $F(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{t - e^t}{t^2} dt$

(1) بين أن:

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{**}): F(x) = \left[\frac{e^t - 1}{t} \right]_{2x}^{3x} - \int_{2x}^{3x} \frac{e^t}{t} dt$$

(2) بين أن:

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{**}): e^{2x} \int_{2x}^{3x} \frac{dt}{t} \leq \int_{2x}^{3x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{3x} \int_{2x}^{3x} \frac{dt}{t}$$

(3) استنتج: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x)$

التمرين رقم 29:

نعتبر التكامل $I = \int_0^1 f(t) dt$ حيث $f(t) = \sqrt{t}$.

و الأعداد $x_i = \frac{i}{n}$ حيث $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

بين أن: $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\frac{1}{n} f(x_{i-1}) \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f(x_i)$$

و استنتج تأطيرا للعدد I .

حدد: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

التمرين رقم 30:

نعتبر الدالة: $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2 + |t| + 1}} dt$

و نضع: $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + |t| + 1}}$

(1) بين أن F معرفة على $\mathbb{R}$ و أنها فردية.

(2) بين أن: $\forall t \geq 0: \frac{1}{t+1} \leq f(t) \leq t$

و استنتج أن: $\forall x \geq 0: F(x) \leq x$

و أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$

(3) بين أن $f(t) \leq \frac{1}{t}$ و استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$

(4) ادرس تغيرات F و أنشئ منحنيا.