هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	الأعداد العقدية حلول مقترحة	سلسلة 4

تمرين 1 :

1

نضع : $\text{¢} = a+b\,i$ حيث $(a;b)\in IR^2$

لدينا :
$$\text{¢}^2=\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2+2ab\,i=-7-24\,i \\ |\text{¢}|^2=|\Delta|^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=-7 \\ 2ab=-24 \\ a^2+b^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2=18 \\ 2b^2=32 \\ ab=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=9 \\ b^2=16 \\ ab=-12 \end{cases}$$

$$\text{¢}^2=\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-4 \end{cases} ou \begin{cases} a=-3 \\ b=4 \end{cases}$$

بالتالي جذرا Δ المربعين هما : $\text{¢}_1=3-4\,i$ و $\text{¢}_2=-3+4\,i$

رغم أنه في غالب الأحيان يطلب فقط التحقق من الجذرين المربعين لكن الالمام بطريقة تحديد الجذرين أمر مهم و ينبغي التمكن منه رغم صعوبة الحسابات أحيانا.

2

لنحل في C المعادلة : $z^2-(1+2\,i)\,z+(1+7\,i)=0$

لدينا : $\Delta=(1+2i)^2-4(1+7i)=1+4i-4-4-28i=-7-24\,i=(3-4\,i)^2$

إذن : $z_1=\dfrac{1+2i+3-4i}{2}=2-i$ و $z_2=\dfrac{1+2i-3+4i}{2}=-1+3i$

بالتالي : $S=\{2-i\ ;\ -1+3i\}$

تمرين 2 :

لنحل في C المعادلة : $i\,z^2+\left(1+\sqrt{3}\,i\right)z+\sqrt{3}=0$

لدينا : $\Delta=\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^2-4\sqrt{3}\,i=1+2\sqrt{3}\,i-3-4\sqrt{3}\,i=1-2\sqrt{3}\,i-3=\left(1-\sqrt{3}\,i\right)^2$

إذن : $z_1=\dfrac{-1-\sqrt{3}i+1-\sqrt{3}i}{2i}=\dfrac{-2\sqrt{3}i}{2i}=-\sqrt{3}$ و $z_2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i-1+\sqrt{3}i}{2i}=\dfrac{-2}{2i}=i$

بالتالي : $S=\left\{i\ ;-\sqrt{3}\right\}$

لا داعي لتحديد الجذرين المربعين للمحددة لأننا نستطيع بسهولة التعرف على متطابقة هامة شبيهة بالتي نشرنا

تمرين 3 : (E) : $2z^2-2(\sim+i)\,z+\sim^2-1=0$ ، $\sim\in]1;+\infty[$

1

لدينا :
$$\Delta=4(\sim+i)^2-8(\sim^2-1)=4(\sim^2+2\sim i-1)-8\sim^2+8=4\sim^2+8\sim i-4-8\sim^2+8$$
$$\Delta=-4\sim^2+8\sim i+4=-4(\sim^2-2\sim i-1)=(2i)^2(\sim-i)^2=(2\sim i+2)^2$$

إذن : $z_1=\dfrac{2(\sim+i)-2(\sim i+1)}{4}=\dfrac{\sim-1}{2}-\dfrac{\sim-1}{2}i$ و $z_2=\dfrac{2(\sim+i)+2(\sim i+1)}{4}=\dfrac{\sim+1}{2}+\dfrac{\sim+1}{2}i$

بالتالي : $S=\left\{\dfrac{\sim-1}{2}-\dfrac{\sim-1}{2}i\ ;\ \dfrac{\sim+1}{2}+\dfrac{\sim+1}{2}i\right\}$

2

$$z_1=\frac{\sim-1}{2}-\frac{\sim-1}{2}i=\frac{\sim-1}{2}(1-i)=\frac{\sim-1}{2}\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\left[\frac{\sim-1}{\sqrt{2}}\ ;\ \frac{-®}{4}\right]$$

$$z_2=\frac{\sim+1}{2}+\frac{\sim+1}{2}i=\frac{\sim+1}{2}(1+i)=\frac{\sim+1}{2}\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\left[\frac{\sim+1}{\sqrt{2}}\ ;\ \frac{®}{4}\right]$$

(لأن : $\dfrac{\sim-1}{\sqrt{2}}>0$ و $\dfrac{\sim+1}{\sqrt{2}}>0$)

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

تمرين 4 : $P(z)=z^3+(1-3\,i)z^2-(2+3\,i)z-2$

ليكن $a\in IR$ نضع : $z_0=a\,i$

لدينا :

$$P(z_0)=0 \Leftrightarrow -a^3 i-(1-3\,i)a^2-a\,(2+3\,i)\,i-2=0 \Leftrightarrow -a^3 i-a^2+3a^2 i-2a\,i+3a-2=0$$

$$P(z_0)=0 \Leftrightarrow -a^2+3a-2+\left(-a^3+3a^2-2a\right)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases}-a^2+3a-2=0\\-a^3+3a^2-2a=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2-3a+2=0\\-a\left(a^2-3a+2\right)=0\end{cases}$$

$$P(z_0)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}a^2-3a+2=0\\a=0\end{cases} ou \Leftrightarrow \begin{cases}a^2-3a+2=0\\a^2-3a+2=0\end{cases} \Leftrightarrow a^2-3a+2=0 \Leftrightarrow a=1\ ou\ a=2$$

1

إذن الحدودية P تقبل جذرين تخيليين صرفين هما $z_0=i$ و $z_1=2i$

يمكننا ببساطة إجراء التكافؤات أعلاه في البحث أما الجواب فيكفي أن نحسب مثلا $P(i)$ و نجد 0

المطلوب أن نجد حلا تخيليا صرفا واحدا لكننا وجدنا اثنين ، في الجواب يمكن الاكتفاء بأحدهما، لكن هذه النتيجة ستكون مفيدة في السؤال الموالي

بما أن كلا من $z_0=i$ و $z_1=2i$ جذر للحدودية P فإن هذه الأخيرة ستقبل القسمة على $z-i$ و $z-2i$

إذن توجد حدودية Q من الدرجة الأولى معاملاتها أعداد عقدية تحقق : $\begin{cases}P(z)=Q(z)(z-i)(z-2i)\\Q(z)=a\,z+b\ /(a,b)\in C^*\times C\end{cases}$

$$P(z)=(a\,z+b)(z-i)(z-2i) \Rightarrow \begin{cases}P(0)=b\times(-i)\times(-2i)=-2b\\P(-i)=(-a\,i+b)\times(-2i)\times(-3i)=-6(-a\,i+b)\end{cases}$$

لدينا :

$$P(z)=(a\,z+b)(z-i)(z-2i) \Rightarrow \begin{cases}-2=-2b\\i-(1-3i)+(2+3i)i-2=6a\,i-6b\end{cases}$$

$$P(z)=(a\,z+b)(z-i)(z-2i) \Rightarrow \begin{cases}b=1\\-6+6i=6a\,i-6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=1\\a=\dfrac{6i}{6i}=1\end{cases}$$

2

بالتالي : $P(z)=(z+1)(z-i)(z-2i)$

بالتالي مجموعة حلول المعادلة : $P(z)=0$ هي : $S=\{-1;\ i\ ;\ 2i\}$

الطريقة الاعتيادية لحل مثل هذا السؤال هي إجراء القسمة الإقليدية، لكننا آثرنا إدراج طريقة مختلفة قصد توسيع المعارف، اختيار العددين 0 و $-i$ جاء لتكون الحسابات أبسط ما يمكن

كان يمكن تحديد العدد العقدي a بطريقة أبسط لكن هذه الطريقة تتطلب تعاريف لا تدرس حاليا في مستوى البكالوريا

تمرين 5 : نعتبر في C المعادلة : $(E)\ :\ z^3-2(2+3i)z^2-4(1-5i)z+16(1-i)=0$

ليكن $a\in IR$ نضع : $z_0=a$ و $P(z)=z^3-2(2+3i)z^2-4(1-5i)z+16(1-i)$

لدينا :

$$P(z_0)=0 \Leftrightarrow a^3-2(2+3i)a^2-4(1-5i)a+16(1-i) \Leftrightarrow a^3-4a^2-6a^2\,i-4a+20a\,i+16-16i=0$$

$$P(z_0)=0 \Leftrightarrow a^3-4a^2-4a+16+\left(-6a^2+20a-16\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}a^3-4a^2-4a+16=0\\-6a^2+20a-16=0\end{cases}$$

$$P(z_0)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}a^2(a-4)-4(a-4)=0\\3a^2-10a+8=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a-4)\left(a^2-4\right)=0\\3a^2-6a-4a+8=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a-4)(a-2)(a+2)=0\\3a(a-2)-4(a-2)=0\end{cases}$$

$$P(z_0)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}a=4\ ou\ a=2\ ou\ a=-2\\a=2\ \ ou\ \ a=\dfrac{4}{3}\end{cases} \Leftrightarrow a=2$$

1

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

إذن المعادلة (E) تقبل حلا حقيقيا $z_0 = 2$.

لدينا :

$z^3-2(2+3i)z^2-4(1-5i)z+16(1-i)$	$z-2$
z^3-2z^2	$z^2+(-2-6i)z+(-8+8i)$
$0\quad(-2-6i)z^2-4(1-5i)z$	
$(-2-6i)z^2+(4+12i)z$	
$0\quad(-8+8i)z+16(1-i)$	
$(-8+8i)z+16-16i$	
0	

2

إذن $P(z)=(z-2)(z^2-2(1+3i)z-8+8i)$ منه: $P(z)=0 \Leftrightarrow z=2 \ ou \ z^2-2(1+3i)z-8+8i=0$

ولدينا : $\Delta = 4(1+3i)^2-4(-8+8i)=4(1+6i-9+8-8i)=4(-2i)=4(1-i)^2$

إذن: $P(z)=0 \Leftrightarrow z=2 \ ou \ z=\dfrac{2(1+3i)+2(1-i)}{2} \ ou \ z=\dfrac{2(1+3i)-2(1-i)}{2}$

$P(z)=0 \Leftrightarrow z=2 \ ou \ z=2+2i \ ou \ z=4i$

بالتالي : $S=\{2\ ;\ 2+2i\ ;\ 4i\}$

لاحظ أهمية المتساوية الهامة : $(1-i)^2=-2i$ و $(1+i)^2=2i$ لتفادي البحث عن الجذور المربعة كما في التمرين الأول

تمرين 6 : نعتبر في C المعادلة : $(E)\ :\ az^2-i\left(a^4+1\right)z-a^3=0$ حيث $a\in \mathbf{C}^*$

لدينا : $\Delta=\left(i\left(a^4+1\right)\right)^2+4a^4=-\left(a^8+2a^4+1\right)+4a^4=-\left(a^8-2a^4+1\right)=-\left(a^4-1\right)^2$

منه : $\Delta=0 \Leftrightarrow a^4=1 \Leftrightarrow (a^2-1)(a^2+1)=0 \Leftrightarrow (a-1)(a+1)(a-i)(a+i)=0 \Leftrightarrow a\in\{1;-1;i;-i\}$

1

وجب الاحتياط في هذا السؤال ففي المجموعة C وعكس المجموعة IR : $a^n=1$ لا تعني $a=1$ سواء كان الأس زوجيا أم فرديا، بل a يمثل جذرا نونيا للعدد 1، بمعنى هناك n قيمة للعدد a

أ) لدينا : $\Delta=\left(i\left(a^4-1\right)\right)^2$

منه : $z_1=\dfrac{i\left(a^4+1\right)+i\left(a^4-1\right)}{2a}=\dfrac{2a^4i}{2a}=a^3i$ و $z_2=\dfrac{i\left(a^4+1\right)-i\left(a^4-1\right)}{2a}=\dfrac{2i}{2a}=\dfrac{i}{a}$

بالتالي : $S=\left\{a^3i\ ;\ \dfrac{i}{a}\right\}$

2

ب) لدينا $i=\left[1;\dfrac{\pi}{2}\right]$ و $a=[r;\theta]$ منه : $a^3=\left[r^3;3\theta\right]$ منه : $z_1=\left[r^3;3\theta+\dfrac{\pi}{2}\right]$ و $z_2=\left[\dfrac{1}{r};\dfrac{\pi}{2}-\theta\right]$

$z_1+z_2=0 \Leftrightarrow \dfrac{i\left(a^4+1\right)}{2a}=0 \Leftrightarrow a^4=-1 \Leftrightarrow a^4=i^2 \Leftrightarrow \left(a^2=i\right) ou \ \left(a^2=-i\right)$

$z_1+z_2=0 \Leftrightarrow \left(a^2=\dfrac{1}{2}(1+i)^2\right) ou \ \left(a^2=\dfrac{1}{2}(1-i)^2\right)$

$z_1+z_2=0 \Leftrightarrow a\in\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i);\dfrac{-\sqrt{2}}{2}(1+i);\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i);\dfrac{-\sqrt{2}}{2}(1-i)\right\}$

3

القيم المحصل عليها ثم الجذور من الدرجة الرابعة للعدد -1

مرة أخرى لاحظ أهمية : $(1-i)^2=-2i$ و $(1+i)^2=2i$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma