

السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	الأعداد العقدية حلول مقترحة	سلسلة 3
تمرين 1 : $w = \cos\left(\frac{p}{5}\right) + i \sin\left(\frac{p}{5}\right)$ ، $\begin{cases} A = 1 + \cos\left(\frac{p}{5}\right) + \cos\left(\frac{2p}{5}\right) + \cos\left(\frac{3p}{5}\right) + \cos\left(\frac{4p}{5}\right) \\ B = \sin\left(\frac{p}{5}\right) + \sin\left(\frac{2p}{5}\right) + \sin\left(\frac{3p}{5}\right) + \sin\left(\frac{4p}{5}\right) \end{cases}$		
1	$A = 1 + \cos\left(\frac{p}{5}\right) + \cos\left(\frac{2p}{5}\right) + \cos\left(\frac{3p}{5}\right) + \cos\left(\frac{4p}{5}\right)$ $A = 1 + \cos\left(\frac{p}{5}\right) + \cos\left(\frac{2p}{5}\right) + \cos\left(p - \frac{2p}{5}\right) + \cos\left(p - \frac{p}{5}\right)$ $A = 1 + \cos\left(\frac{p}{5}\right) + \cos\left(\frac{2p}{5}\right) - \cos\left(\frac{p}{5}\right) - \cos\left(\frac{2p}{5}\right)$ $A = 1$	
2	$A + iB = 1 + \left[\cos\left(\frac{p}{5}\right) + i \sin\left(\frac{p}{5}\right) \right] + \left[\cos\left(\frac{2p}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2p}{5}\right) \right] + \left[\cos\left(\frac{3p}{5}\right) + i \sin\left(\frac{3p}{5}\right) \right] + \left[\cos\left(\frac{4p}{5}\right) + i \sin\left(\frac{4p}{5}\right) \right]$ $A + iB = 1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = \frac{1 - w^5}{1 - w}$ بما أن $w^5 = \cos(p) + i \sin(p) = -1$ فإن : $A + iB = \frac{2}{1 - w}$ منه : $iB = \frac{2}{1 - w} - A = \frac{2}{1 - w} - 1 = \frac{1 + w}{1 - w}$	
3	$1 - w = 1 - \cos\left(\frac{p}{5}\right) - i \sin\left(\frac{p}{5}\right) = 2 \sin^2\left(\frac{p}{10}\right) - 2 \sin\left(\frac{p}{10}\right) \cos\left(\frac{p}{10}\right) i = 2 \sin\left(\frac{p}{10}\right) \left(\sin\left(\frac{p}{10}\right) - \cos\left(\frac{p}{10}\right) i \right)$ $1 - w = 2 \sin\left(\frac{p}{10}\right) \left(\cos\left(\frac{p}{2} - \frac{p}{10}\right) - \sin\left(\frac{p}{2} - \frac{p}{10}\right) i \right) = 2 \sin\left(\frac{p}{10}\right) \left(\cos\left(\frac{2p}{5}\right) - \sin\left(\frac{2p}{5}\right) i \right)$ $1 - w = \left[2 \sin\left(\frac{p}{10}\right); -\frac{2p}{5} \right]$ $1 + w = 1 + \cos\left(\frac{p}{5}\right) + i \sin\left(\frac{p}{5}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{p}{10}\right) + 2 \sin\left(\frac{p}{10}\right) \cos\left(\frac{p}{10}\right) i = 2 \cos\left(\frac{p}{10}\right) \left(\cos\left(\frac{p}{10}\right) + \sin\left(\frac{p}{10}\right) i \right)$ $1 + w = \left[2 \cos\left(\frac{p}{10}\right); \frac{p}{10} \right]$	
4	$iB = \frac{\left[2 \cos\left(\frac{p}{10}\right); \frac{p}{10} \right]}{\left[2 \sin\left(\frac{p}{10}\right); -\frac{2p}{5} \right]} = \left[\frac{2 \cos\left(\frac{p}{10}\right)}{2 \sin\left(\frac{p}{10}\right)}; \frac{p}{10} + \frac{2p}{5} \right] = \left[\cotan\left(\frac{p}{10}\right); \frac{p}{2} \right] = i \cotan\left(\frac{p}{10}\right)$ بالتالي : $B = \cotan\left(\frac{p}{10}\right)$	
🍋 للتذكير ، $\cotan(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$ (ليس من الضروري استعماله، لكنه يجعل الصيغة أكثر بساطة)		

	$B = \sin\left(\frac{p}{5}\right) + \sin\left(\frac{2p}{5}\right) + \sin\left(\frac{3p}{5}\right) + \sin\left(\frac{4p}{5}\right)$ $C = \frac{B}{2} = \frac{\cotan\left(\frac{p}{10}\right)}{2} : \text{بالتالي}$ $B = \cos\left(\frac{p}{5}\right) + \sin\left(\frac{2p}{5}\right) + \sin\left(p - \frac{2p}{5}\right) + \sin\left(p - \frac{p}{5}\right) : \text{لدينا}$ $B = \sin\left(\frac{p}{5}\right) + \sin\left(\frac{2p}{5}\right) + \sin\left(\frac{p}{5}\right) + \sin\left(\frac{2p}{5}\right)$ $B = 2C$	5
	تمرين 2 : $w = \cos\left(\frac{p}{5}\right) + i \sin\left(\frac{p}{5}\right)$	
	$w^2 + \frac{1}{w^2} - \left(w + \frac{1}{w}\right) + 1 = \frac{w^4 + 1 - w^3 - w + w^2}{w^2} = \frac{1 + (-w) + (-w)^2 + (-w)^3 + (-w)^4}{w^2}$ لدينا: $w^2 + \frac{1}{w^2} - \left(w + \frac{1}{w}\right) + 1 = \frac{1}{w^2} \times \frac{1 - (-w)^5}{1 - (-w)} = \frac{1}{w^2} \times \frac{1 + w^5}{1 + w}$ وبما أن $w^5 = \cos(p) + i \sin(p) = -1$ فإن : $w^2 + \frac{1}{w^2} - \left(w + \frac{1}{w}\right) + 1 = 0$	1
	لدينا $z = w + \frac{1}{w}$ منه: $z^2 - z - 1 = \left(w + \frac{1}{w}\right)^2 - \left(w + \frac{1}{w}\right) - 1 = w^2 + 2 + \frac{1}{w^2} - \left(w + \frac{1}{w}\right) - 1 = w^2 + \frac{1}{w^2} - \left(w + \frac{1}{w}\right) + 1 = 0$ إذن z هو حل للمعادلة : $z^2 - z - 1 = 0$ ، $\Delta = 1 + 4 = 5$ منه : $z = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ أو $z = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	2
	لدينا : $w + \frac{1}{w} = w + w^{-1} = \cos\left(\frac{p}{5}\right) + i \sin\left(\frac{p}{5}\right) + \cos\left(-\frac{p}{5}\right) + i \sin\left(-\frac{p}{5}\right) = 2 \cos\left(\frac{p}{5}\right)$ (ب)	
	من (أ) و (ب) نستنتج أن : أو $2 \cos\left(\frac{p}{5}\right) = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ لكن وبما أن $\cos\left(\frac{p}{5}\right) > 0$ (لأن $0 < \frac{p}{5} < \frac{p}{2}$) فإن : $2 \cos\left(\frac{p}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ بالتالي : $\cos\left(\frac{p}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ منه : $\sin\left(\frac{p}{5}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{p}{5}\right)} = \sqrt{1 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{16 - 1 - 2\sqrt{5} - 5}{16}} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{2(5 - \sqrt{5})}}{4}$ ومنه : $\tan\left(\frac{p}{5}\right) = \frac{\sin\left(\frac{p}{5}\right)}{\cos\left(\frac{p}{5}\right)} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$	3
	$\sin\left(\frac{p}{5}\right) > 0$ لأن : $\sin\left(\frac{p}{5}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{p}{5}\right)}$ 🌿 تجاوزت بعض حسابات الجذور المربعة 🌿	

تمرين 3 : المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م. $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، ليكن $(n, a) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$ لدينا لكل $k \in \{1; 2, \dots; n\}$

$$z_k + 1 = 1 + \cos\left(\frac{a}{n} + \frac{2kp}{n}\right) + i \sin\left(\frac{a}{n} + \frac{2kp}{n}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{a}{2n} + \frac{kp}{n}\right) + 2 \sin\left(\frac{a}{2n} + \frac{kp}{n}\right) \sin\left(\frac{a}{2n} + \frac{kp}{n}\right) i$$

$$z_k + 1 = 2 \cos\left(\frac{a}{2n} + \frac{kp}{n}\right) \left(\cos\left(\frac{a}{2n} + \frac{kp}{n}\right) + \sin\left(\frac{a}{2n} + \frac{kp}{n}\right) i \right)$$

$$(z_k + 1)^n = 2^n \cos^n\left(\frac{a}{2n} + \frac{kp}{n}\right) \left(\cos\left(\frac{a}{2} + kp\right) + \sin\left(\frac{a}{2} + kp\right) i \right) \quad \text{منه :}$$

طريقة 1

▪ إذا كان : $\cos^n\left(\frac{a}{2n} + \frac{kp}{n}\right) > 0$ فإن : $\arg((z_k + 1)^n) \equiv 0 + \frac{a}{2} + kp[2p] \equiv \frac{a}{2}[p]$

▪ إذا كان : $\cos^n\left(\frac{a}{2n} + \frac{kp}{n}\right) < 0$ فإن : $\arg((z_k + 1)^n) \equiv p + \frac{a}{2} + kp[2p] \equiv \frac{a}{2}[p]$

▪ إذا كان : $\cos^n\left(\frac{a}{2n} + \frac{kp}{n}\right) = 0$ فإن : $(z_k + 1)^n = 0$

في كل الحالات نجد أن M_k إما تنطبق مع O أو تنتمي للمستقيم المار من O والذي يكون الزاوية $\frac{a}{2}$ مع

$(O, \vec{e}_1)$ ، بالتالي النقط M_1 و M_2 و ... و M_n مستقيمة

طريقة 2 : لدينا لكل $p, q \in \{1; 2, \dots; n\}$

$$\frac{(z_p + 1)^n}{(z_q + 1)^n} = \frac{2^n \cos^n\left(\frac{a}{2n} + \frac{pp}{n}\right) \left(\cos\left(\frac{a}{2} + pp\right) + \sin\left(\frac{a}{2} + pp\right) i \right)}{2^n \cos^n\left(\frac{a}{2n} + \frac{qp}{n}\right) \left(\cos\left(\frac{a}{2} + qp\right) + \sin\left(\frac{a}{2} + qp\right) i \right)} = \frac{\cos^n\left(\frac{a}{2n} + \frac{pp}{n}\right)}{\cos^n\left(\frac{a}{2n} + \frac{qp}{n}\right)} [1; (p-q)p] \in \mathbb{R}$$

إذن لكل $p, q \in \{1; 2, \dots; n\}$ و M_p و M_q مستقيمة مع O ، بالتالي النقط M_1 و M_2 و ... و M_n مستقيمة

🌟 للتذكير $\forall r \in \mathbb{R}^* \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad [r; kp] \in \mathbb{R}$

تمرين 4 : نعتبر العدد : $Z = \cos q + i \sin q$ حيث $q \in]-p; p]$

لدينا $|Z| = 1$ منه : $Z \bar{Z} = 1$ منه : $1 + Z + Z^2 = Z \bar{Z} + Z + Z^2 = Z(\bar{Z} + 1 + Z) = (1 + Z + \bar{Z})Z = (1 + 2 \cos q)Z$

▪ إذا كان : $\cos q = \frac{-1}{2}$ فإن : $1 + Z + Z^2 = 0$ (لا يمكن كتابته على الشكل المثلثي)

▪ إذا كان : $\cos q > \frac{-1}{2}$ فإن : $1 + Z + Z^2 = [1 + 2 \cos q; q]$

▪ إذا كان : $\cos q < \frac{-1}{2}$ فإن : $1 + Z + Z^2 = [-(1 + 2 \cos q); q + p]$

🌟 الشكل المثلثي $r(\cos q + i \sin q)$ يستوجب أن يكون $r > 0$ ، فإذا كان سالبا يكون لدينا :

$$r(\cos q + i \sin q) = (-r) \times (-1) \times [1; q] = [-r; 0] \times [1; p] \times [1; q] = [-r; q + p]$$

🌟 الشكل الأسّي لا يستوجب الشرط السابق