السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	الأعداد العقدية حلول مقترحة	سلسلة 1

تمرين 1 :

$$z_1=(5i-1)(i+3)$$
$$z_1=5i^2+15i-i-3$$
$$z_1=-5+14i-3$$
$$z_1=-8+14i$$

$$z_2=(7i-1)^2$$
$$z_2=(7i)^2-14i+1$$
$$z_2-49-14i+1$$
$$z_2=-48-14i$$

$$z_3=(i+2)^3$$
$$z_3=i^3+3\times i^2\times 2+3\times i\times 2^2+2^3$$
$$z_3=-i-6+12i+8$$
$$z_3=2+11i$$

$$z_4=(3-i)^4$$
$$z_4=\left[(3-i)^2\right]^2$$
$$z_4=(9-6i+i^2)^2$$
$$z_4=(9-6i-1)^2$$
$$z_4=(8-6i)^2$$
$$z_4=64-96i+(6i)^2$$
$$z_4=64-96i-36$$
$$z_4=28-96i$$

$$z_5=\frac{5}{2-i}+\frac{3-i}{2+i}$$
$$z_5=\frac{5(2+i)}{2^2-i^2}+\frac{(3-i)(2-i)}{2^2-i^2}$$
$$z_5=\frac{10+5i}{4+1}+\frac{6-3i-2i+i^2}{4+1}$$
$$z_5=\frac{10+5i+6-5i-1}{5}=\frac{15}{5}=3$$

$$z_6=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{30}$$
$$z_6=\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)^{15}$$
$$z_6=\left(\frac{2}{4}+i-\frac{2}{4}\right)^{15}$$
$$z_6=i^{15}=(i^2)^7\times i=-i$$

تمرين 2 :

بوضع $z=x+iy$ نجد :

$$5z+7\bar{z}+4i-3=0$$
$$5(x+iy)+7(x-iy)+4i-3=0$$
$$5x+5iy+7x-7iy+4i-3=0$$
$$12x-2iy=3-4i$$

منه : $\begin{cases}12x=3\\-2y=-4\end{cases}$ منه : $\begin{cases}x=\dfrac{1}{4}\\y=2\end{cases}$ منه : $z=\dfrac{1}{4}+2i$ بالتالي : $S=\left\{\dfrac{1}{4}+2i\right\}$

بوضع $z=x+iy$ ، $(x,y)\in IR^2$ نجد :

$$(1-i)z-3i\bar{z}=1+4i$$
$$(1-i)(x+iy)-3i(x-iy)=1+4i$$
$$x+iy-ix+y-3ix-3y=1+4i$$
$$(x-2y)+(y-4x)i=1+4i$$

منه : $\begin{cases}x-2y=1\\-4x+y=4\end{cases}$

($\Delta_y=\begin{vmatrix}1&1\\-4&4\end{vmatrix}=4+4=8$ ، $\Delta_x=\begin{vmatrix}1&-2\\4&1\end{vmatrix}=1+8=9$ ، $\Delta=\begin{vmatrix}1&-2\\-4&1\end{vmatrix}=1-8=-7$)

منه : $\begin{cases}x=\dfrac{-9}{7}\\y=\dfrac{-8}{7}\end{cases}$ منه : $z=\dfrac{-9}{7}-\dfrac{8}{7}i$ بالتالي : $S=\left\{\dfrac{-9}{7}-\dfrac{8}{7}i\right\}$

بوضع $z=x+iy$ ، $(x,y)\in IR^2$ نجد :

$$z\bar{z}+3(z-\bar{z})=13+18i$$
$$x^2+y^2+3(2iy)=13+18i$$

منه : $\begin{cases}x^2+y^2=13\\6y=18\end{cases}$ منه : $\begin{cases}y=3\\x^2=4\end{cases}$

منه : $\begin{cases}y=3\\x=2\end{cases}$ أو $\begin{cases}y=3\\x=-2\end{cases}$ بالتالي : $S=\{2+3i\,;-2+3i\}$

لدينا $(z+2\bar{z}+i)(z+2\bar{z}-i)=0 \Leftrightarrow (z+2\bar{z})^2-i^2=0 \Leftrightarrow (z+2\bar{z})^2+1=0$ منه : $z+2\bar{z}+i=0$ أو $z+2\bar{z}-i=0$

الآن بوضع : $z = x + i y$ ، $(x, y) \in IR^2$ نجد : $x + yi + 2x - 2iy + i = 0$ أو $x + yi + 2x - 2iy - i = 0$

منه : $3x - yi = -i$ أو $3x - yi = i$ منه: $\begin{cases} 3x = 0 \\ -y = -1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} 3x = 0 \\ -y = 1 \end{cases}$ بالتالي : $S = \{i \,;\, -i\}$

تمرين 3 : نعتبر العدد العقدي $j = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1

$$j^2 + j + 1 = \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4} + \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{-2}{4} + \frac{-1}{2} + 1 = 0$$

لنستنتج أن: $j^3 = 1$

طريقة 1	طريقة 2
بما أن $j^2 = -j - 1$ ، فإن : $j^3 = j\,j^2 = j(-j-1)$ ، $j^3 = -j^2 - j = -(-j-1) - j = j + 1 - j = 1$	بما أن : $j^3 - 1 = (j-1)(j^2 + j + 1) = 0$ فإن : $j^3 = 1$

2 بما أن $j \neq 1$ فإن:

$$S = 1 + j + j^2 + j^3 + \dots + j^{2014}$$

$$S = 1 \times \frac{1 - j^{2015}}{1 - j} = \frac{1 - j^{2013} \times j^2}{1 - j} = \frac{1 - (j^3)^{671} \times j^2}{1 - j} = \frac{1 - j^2}{1 - j} = \frac{(1-j)(1+j)}{1-j} = 1 + j = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$.

تمرين 4 : ليكن $z \neq \frac{-i}{2}$ حيث $|z| = 1$ نضع : $u = \frac{z + 2i}{2z + i}$.

بما أن $|z| = 1$ فإن : $z\bar{z} = 1$ منه : $\bar{z} = \frac{1}{z}$

لدينا :
$$u.\bar{u} = \left(\frac{z + 2i}{2z + i}\right)\left(\frac{\bar{z} - 2i}{2\bar{z} - i}\right) = \left(\frac{z + 2i}{2z + i}\right)\left(\frac{\frac{1}{z} - 2i}{2\frac{1}{z} - i}\right) = \left(\frac{z + 2i}{2z + i}\right)\left(\frac{1 - 2zi}{2 - zi}\right) = \frac{z - 2z^2 i + 2i + 4z}{4z - 2z^2 i + 2i + z} = 1$$

بالتالي : $|u|^2 = 1$ أي : $|u| = 1$

تمرين 5 : ليكن a و b عددين عقديين حيث $a \neq b$ و $|a| = |b| = 1$.

لدينا $|a| = |b| = 1$ منه : $\bar{a} = \frac{1}{a}$ منه $\bar{b} = \frac{1}{b}$

الآن :
$$\overline{\left(\frac{z + ab\bar{z} - (a+b)}{a - b}\right)} = \frac{\bar{z} + \bar{a}\bar{b}z - (\bar{a} + \bar{b})}{\bar{a} - \bar{b}} = \frac{\bar{z} + \frac{1}{ab}z - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{ab\bar{z} + z - (b + a)}{b - a} = -\left(\frac{z + ab\bar{z} - (a+b)}{a - b}\right)$$

بالتالي : $\frac{z + ab\bar{z} - (a+b)}{a - b} \in i\,IR$

لاحظ التكافؤ الهام: $\bar{a} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow |a| = 1$ و $\bar{Z} = -Z \Leftrightarrow Z \in i\,IR$

تمرين 6 : a و b و c أعداد عقدية مختلفة مثنى مثنى.

1 لدينا :

$$|a-b|^2 + |a-c|^2 = |b-c|^2 \Leftrightarrow (a-b)\overline{(a-b)} + (a-c)\overline{(a-c)} = (b-c)\overline{(b-c)}$$

$$|a-b|^2 + |a-c|^2 = |b-c|^2 \Leftrightarrow (a-b)(\bar{a} - \bar{b}) + (a-c)(\bar{a} - \bar{c}) = (b-c)(\bar{b} - \bar{c})$$

$$|a-b|^2 + |a-c|^2 = |b-c|^2 \Leftrightarrow a\bar{a} - a\bar{b} - b\bar{a} + b\bar{b} + a\bar{a} - a\bar{c} - c\bar{a} + c\bar{c} = b\bar{b} - b\bar{c} - c\bar{b} + c\bar{c}$$

$$|a-b|^2 + |a-c|^2 = |b-c|^2 \Leftrightarrow 2a\bar{a} + b\bar{c} + c\bar{b} = a\bar{b} + b\bar{a} + a\bar{c} + c\bar{a}$$

و

و من جهة أخرى :

$$\frac{b-a}{c-a}\in i\,IR \Leftrightarrow \frac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{c}-\overline{a}}=\frac{a-b}{c-a} \Leftrightarrow \overline{b}c-\overline{b}a-\overline{a}c+\overline{a}a=a\overline{c}-a\overline{a}-b\overline{c}+b\overline{a}$$

$$\frac{b-a}{c-a}\in i\,IR \Leftrightarrow 2a\overline{a}+b\overline{c}+c\overline{b}=a\overline{b}+b\overline{a}+a\overline{c}+c\overline{a}$$

بالتالي : $\frac{b-a}{c-a}\in i\,IR \Leftrightarrow |a-b|^2+|a-c|^2=|b-c|^2$

2 باعتبار النقط في معلم م.م.م $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ ، فالعبارة المحصل عليها تعني :

$$AB^2+AC^2=BC^2 \Leftrightarrow (AB)\perp(AC)$$

وهي تعبر عن مبرهنتي فيثاغورس المباشرة و العكسية.

تمرين 7 : المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$. حدد طبيعة المجموعات التالية.

$E=\left\{M(z)/\ \ 5z+3\overline{z}+2-i\in IR\right\}$ ، نضع : $z=x+i\,y/\ (x,y)\in IR^2$

$$M\in E \Leftrightarrow 5x+5i\,y+3x-3i\,y+2-i\in IR \Leftrightarrow 8x+2+2i\,y-i\in IR \Leftrightarrow 2y-1=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}$$

بالتالي E هي المستقيم ذو المعادلة : $(E):\ \ y=\frac{1}{2}$

$F=\left\{M(z)/\ \ |z-2i+1|=|z+i-3|\right\}$

نعتبر النقطتين $A(3-i)$ و $B(-1+2i)$ ، $M\in F \Leftrightarrow |z-(-1+2i)|=|z-(3-i)| \Leftrightarrow BM=AM$

إذن : F هو المستقيم واسط القطعة $[AB]$

أحينا الحل الهندسي يكون جد بسيط مقارنة بالحل الجبري، خصوصا أنه طلب منا فقط تحديد طبيعة المجموعة (دائرة،مستقيم.....)

$K=\left\{M(z)/\ \ (z+3i-1)\left(\overline{z}+2\right)\in i\,IR\right\}$

لدينا :

$$M\in K \Leftrightarrow \overline{(z+3i-1)\left(\overline{z}+2\right)}=-(z+3i-1)\left(\overline{z}+2\right) \Leftrightarrow \left(\overline{z}-3i-1\right)(z+2)+(z+3i-1)\left(\overline{z}+2\right)=0$$

$$M\in K \Leftrightarrow \overline{z}z+2\overline{z}-3iz-6i-z-2+z\overline{z}+2z+3i\overline{z}+6i-\overline{z}-2=0$$

$$M\in K \Leftrightarrow 2z\overline{z}+\overline{z}+3i\overline{z}-3iz+z-4=0$$

الآن بوضع $z=x+i\,y/\ (x,y)\in IR^2$ نجد:

$$M\in K \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+x-i\,y+3i(x-i\,y)-3i(x+i\,y)+x+i\,y-4=0$$

$$M\in K \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2x+3xi+3y-3xi+3y-4=0$$

$$M\in K \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2x+6y-4=0$$

$$M\in K \Leftrightarrow x^2+y^2+x+3y-2=0$$

$$M\in K \Leftrightarrow x^2+x+\frac{1}{4}+y^2+3y+\frac{9}{4}=2+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}$$

$$M\in K \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{18}{4}$$

إذن K هي الدائرة ذات المركز $\Omega\left(\frac{-1}{2};\frac{-3}{2}\right)$ و الشعاع $r=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

لاحظ أنه من الأفضل أن نبدأ بتبسيط تعبير المجموعة إلى أن نصل مرحلة ينتهي التبسيط، إذاك نضع $z=x+i\,y$ ، فليس من المفيد دائما استعمال هذا الوضع من البداية كما هو الشأن في المجموعة الأولى.

في هذا المثال يمكن الوضع من البداية و ربما لن يكون هناك اختلاف كبير في الحسابات، لكن في أمثلة أخرى يكون الفرق واضحا .

$H=\left\{M(z)/\ \ \frac{z+2}{z}\in i\,IR\right\}$ ، لدينا :

$$M\in H \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z+2}{z}\right)}=-\frac{z+2}{z} \Leftrightarrow \frac{\overline{z}+2}{\overline{z}}+\frac{z+2}{z}=0 \Leftrightarrow \frac{z\overline{z}+2z+z\overline{z}+2\overline{z}}{z\overline{z}}=0 \Leftrightarrow 2z\overline{z}+2z+2\overline{z}=0 \Leftrightarrow z\overline{z}+z+\overline{z}=0$$

الآن بوضع $z=x+iy\ /\ (x,y)\in IR^2$ نجد: $M\in H \Leftrightarrow x^2+y^2+2x=0 \Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2=1 \Leftrightarrow (x+1)^2+y^2=1$ إذن H هي الدائرة ذات المركز $\Omega(-1;0)$ و الشعاع $r=1$	
لدينا ، $V=\left\{M(z)\ /\ \frac{\bar{z}+2}{z+2}\in IR\right\}$ ، $M\in V \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{\bar{z}+2}{z+2}\right)}=\frac{\bar{z}+2}{z+2} \Leftrightarrow \frac{z+2}{\bar{z}+2}=\frac{\bar{z}+2}{z+2} \Leftrightarrow (z+2)^2=(\bar{z}+2)^2 \Leftrightarrow (z+2)^2-(\bar{z}+2)^2=0 \Leftrightarrow (z+\bar{z}+4)(z-\bar{z})=0$ الآن بوضع $z=x+iy\ /\ (x,y)\in IR^2$ نجد: $M\in V \Leftrightarrow (2x+4)(2iy)=0 \Leftrightarrow x=-2\ ou\ y=0$ إذن V هي اتحاد المستقيمين : $(D_1): x=-2$ و $(D_2): y=0$	
الأمثلة أعلاه مختارة بعناية بغية التعريف فمختلف طرق تحديد مثل هذه المجموعات.	