

تمرين رقم 1

- نضع $f(z) = \frac{iz-1}{(z+1)^2}$ لكل z من $\mathbb{C} - \{-1\}$
- (1) أ- حدد العدد الحقيقي y بحيث $f(iy) = iy$
 ب- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $f(z) = z$: نرسم $z_0 ; z_1 ; z_2$ لحلول المعادلة حيث $z_0 \in i\mathbb{R}$ و $\text{Re}(z_1) > \text{Re}(z_2)$
- (2) أ- تحقق أن $z_1 + 1 = \left[1, \frac{11\pi}{6}\right]$ و $z_2 + 1 = e^{i\frac{7\pi}{6}}$
 ب- استنتج الشكل المثلثي لكل من العددين $z_2 ; z_1$
- (3) نفترض في ما يلي أن $z = e^{i\alpha}$; $0 \leq \alpha < \pi$
 أ- بين أن $\overline{f(z)} = izf(z)$
 ب- حدد α علما أن $f(z)$ تخيلي صرف
 ت- أكتب $f(z)$ على الشكل $re^{i\theta}$ حيث $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$
- (4) حدد z إذا علمت أن $|z| = 1$ و $\text{Re}(f(z)) = \frac{1}{2}$

تمرين رقم 2

- ليكن a عددا عقديا مخالفا للعددين العقديين $i ; -i$
- (1) أ- تحقق أن العدد $u = a + i$ حل للمعادلة $z^2 - (1+a)(1+i)z + (1+a^2)i = 0$: (E)
 ب- حدد v الحل الثاني للمعادلة (E)
- (2) نفترض أن : $|a| = 1$ أ- بين أن $\frac{u}{v} \in \mathbb{R}$
 ب- تحقق أن $u^2 = a[(a - \bar{a}) + 2i]$
 ج- استنتج أن $\arg(u) = \frac{1}{2}\arg(a) + \frac{\pi}{4}$ $[\pi]$
- (3) بين أن $|u| + |v| \geq 2$

تمرين رقم 3

- ليكن θ من المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
- (1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 + 2\cos\theta(1 + \cos\theta)z + (1 + \cos\theta)^2 = 0$: (E) و أكتب الحلين على الشكل المثلثي
- (2) حدد على الشكل المثلثي $z_1 ; z_2$ الجذرين المربعين للعدد $a = 2\cos^2\frac{\theta}{2}(-\cos\theta + i\sin\theta)$
- (3) استنتج الشكل المثلثي ل $z_3 ; z_4$ الجذرين المربعين للعدد $\bar{a}$
- (4) نضع $s_n = z_1^n + z_2^n + z_3^n + z_4^n$ لكل n من $\mathbb{N}$
 بين أن $s_{2p+1} = 0$ و أن $s_{2p} = (-1)^p 2^{p+2} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2p} \cos(p\theta)$

تمرين رقم 4

- (1) بين أن $\arctan a - \arctan b = \arctan \frac{a-b}{1+ab}$ $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^{+2})$
- (2) بين أن المتتالية $U_n = \sum_{k=1}^n \arctan \frac{1}{k^2 + k + 1}$ متقاربة و حدد نهايتها