

نضع $f(z) = \frac{1-i}{2}z + \frac{1+i}{z}$ حيث z عدد من \mathbb{C}^*

$$(1) \quad \text{أ- بين أن } [f(z) = f(\bar{z})] \Leftrightarrow [z\bar{z} = 2 \text{ أو } \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)]$$

ب- استنتج المجموعة $(\Sigma) = \{M(z) \in (P) / f(z) \in \mathbb{R}\}$

(2) نعتبر في \mathbb{C} المعادلة $(E): z^2 f(z) = (1+i)z + 2i$

$$\text{أ- بين أن } (E) \Leftrightarrow (z^3 + 2 - 2i = 0)$$

ب- تحقق أن $z_0 = 1+i$ حل للمعادلة (E) ثم حل المعادلة (E)

ج- أكتب حلول المعادلة (E) على الشكل المثلثي

التمرين الثاني

ليكن a من \mathbb{C}^* و نعتبر التطبيق f_a المعرف من $\mathbb{C} - \{a\}$ نحو $\mathbb{C} - \{a\}$ بما يلي : $f_a(z) = \frac{az}{z-a}$

$$(1) \quad \text{بين أن } [f_a(z) \in i\mathbb{R}] \Leftrightarrow [|z|^2 \operatorname{Re}(a) = |a|^2 \operatorname{Re}(z)]$$

(2) نضع $z-a = re^{i\theta}$ أحسب $|f_a(z)-a|$ بدلالة r ; $|a|$ و $\arg(f_a(z)-a)$ بدلالة θ ; $\arg(a)$

(3) نأخذ في ما يلي $a = -1+i$ و نعتبر المجموعات $(\zeta) = \{M(z) \in (P) / |f_a(z)-a| = 2\}$

$$(\Gamma) = \{M(z) \in (P) / f_a(z) \in i\mathbb{R}\} \quad \text{و} \quad (D) = \left\{M(z) \in (P) / \arg(f_a(z)-a) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]\right\}$$

أ- حدد المجموعات (Γ) ; (D) ; (ζ)

ب- ليكن z_0 من $\mathbb{C} - \{a\}$ و نعتبر النقطة $B(z_0)$ بحيث $B \in (D) \cap (\zeta)$

حدد الشكل الجبري للعدد $f_a(z)$ ثم استنتج z_0

التمرين الثالث

نضع $f(z) = \frac{iz-1}{(z+1)^2}$ لكل z من $\mathbb{C} - \{-1\}$

(1) أ- حدد العدد الحقيقي y بحيث $f(iy) = iy$

ب- حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة : $f(z) = z$

نرمز بـ $z_0 ; z_1 ; z_2$ لحلول المعادلة حيث $z_0 \in i\mathbb{R}$ و $\operatorname{Re}(z_1) > \operatorname{Re}(z_2)$

$$(2) \quad \text{أ- تحقق أن } z_1 + 1 = \left[1, \frac{11\pi}{6}\right] \quad \text{و} \quad z_2 + 1 = e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

ب- استنتج الشكل المثلثي لكل من العددين $z_2 ; z_1$

(3) نفترض في ما يلي أن $z = e^{i\alpha}$; $0 \leq \alpha < \pi$

$$\text{أ- بين أن } \overline{f(z)} = izf(z)$$

ب- حدد α علما أن $f(z)$ تخيلي صرف

ج- أكتب $f(z)$ على الشكل $re^{i\theta}$ حيث $(r, \theta) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$

$$(4) \quad \text{حدد } z \text{ إذا علمت أن } |z| = 1 \text{ و } \operatorname{Re}(f(z)) = \frac{1}{2}$$

التمرين الرابع

نضع $s_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$ و $s'_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{n}$ حيث n عدد طبيعي و $n \geq 2$.

$$(1) \quad \text{بين أن } Z = s'_n + i s_n \quad \left(1 - e^{i\frac{\pi}{n}}\right)Z = 2$$

(2) حدد الشكل الجبري للعدد Z و استنتج أن $s_n = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{2n}}$ و أحسب النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_n}{n}$