

التمرين الأول
التمرين الأول

حدد مجموعة النقط $M(z)$ في الحالات التالية :

$$(1) \quad A(1+i), \quad B(z+i), \quad C(1+iz) \text{ مستقيمة}$$

$$(2) \quad \text{النقط } P(z^3), \quad N(z^2), \quad M(z) \text{ رؤوس مثلث قائم الزاوية في } N$$

$$(3) \quad \text{النقط } P(iz), \quad N(i), \quad M(z) \text{ تكون مثلثا قائم الزاوية في } N$$

التمرين الثاني
التمرين الثاني

حدد مجموعة النقط $M(z)$ في كل من الحالات التالية :

$$(1) \quad |z+i| = |\bar{z}-1| \quad (2) \quad \frac{z+1+i}{z-i} \in \mathbb{R} \quad (3) \quad \frac{iz-1}{z+2i} \in i\mathbb{R} \quad (4) \quad z\bar{z} + z + \bar{z} = 3$$

التمرين الثالث
التمرين الثالث

حدد الشكل المثلثي العدد z في الحالات التالية :

$$(1) \quad z = \frac{3\sqrt{3} + i\sqrt{6}}{\sqrt{3} + i\sqrt{3}} \quad (2) \quad z = (1+i) \left[(1+\sqrt{3}) + i(\sqrt{3}-1) \right]$$

$$(3) \quad \theta \in]0, 2\pi[\text{ و } z = 1 - \cos \theta + i \sin \theta \quad (4) \quad \theta \in]0, \pi[\text{ و } z = \cos 2\theta + i \cos^2 \theta$$

$$(5) \quad \theta \in]\pi, 2\pi[\text{ و } z = \sin \theta + i(1 + \cos \theta) \quad (6) \quad \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ و } z = \frac{1}{1 + i \tan \theta}$$

$$(7) \quad \alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ و } z = \frac{\cos \alpha - i \sin \alpha}{\sin \alpha - i \cos \alpha} \quad (8) \quad \alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ و } z = 1 + i \tan \alpha$$

التمرين الرابع
التمرين الرابع

$$(1) \quad \text{بين ما يلي : } |z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$$

$$(2) \quad (|z+z'| = |z| + |z'|) \Leftrightarrow (\arg(z) \equiv \arg(z') \pmod{2\pi})$$

$$(3) \quad \text{ليكن } a, b, c \text{ أعداد عقدية معيارها 1 بين أن } |ab+bc+ca| = |a+b+c|$$

$$(4) \quad \left(\forall (a,b) \in \mathbb{C}^{*2} \right) \quad \left| \frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2} \right| = \left| \frac{a-b}{ab} \right|$$

$$(5) \quad (|z+z'| = |z| + |z'|) \Leftrightarrow (\arg(z) \equiv \arg(z') \pmod{2\pi})$$

التمرين الخامس
التمرين الخامس

لكل عدد عقدي z يخالف i نضع $Z = \frac{iz}{z-i}$

$$(1) \quad \text{أحسب } Z \text{ من أجل } z = 2 + 3i$$

$$(2) \quad \text{حل في المجموعة } \mathbb{C} \text{ المعادلة } Z = 1 + 2i$$

$$(3) \quad \text{أ- بين أن : } \left(\left(z - \frac{1}{2}i \right) \left(\bar{z} + \frac{1}{2}i \right) - \frac{1}{4} = 0 \right) \Leftrightarrow (\bar{Z} = Z) \quad (\forall z \in \mathbb{C} - \{i\})$$

- ب- استنتج مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى (P) و التي يكون من أجلها Z حقيقي
 (4) حدد المجموعة (D) للنقط $M(z)$ من المستوى (P) و التي يكون من أجلها $|Z|=1$

التمرين السادس

ليكن z عددا عقديا بحيث $z \neq i$ و نضع $Z = \frac{i+z}{iz+1}$

- (1) أحسب Z من أجل $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$
 (2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $Z = 2$
 (3) أ- أكتب $\bar{Z}$ بدلالة z و $\bar{z}$
 ب- بين أن $\bar{Z} = -Z \Leftrightarrow (z + \bar{z})(i(z - \bar{z}) - 2) = 0$: $(\forall z \in \mathbb{C} - \{-i\})$
 ج- استنتج (E) مجموعة النقط $M(z)$ التي يكون من أجلها Z عددا تخيليا
 (4) حدد (D) مجموعة النقط $M(z)$ و التي يكون من أجلها $|Z|=1$
 (5) أ- بين أن $\bar{Z} = Z \Leftrightarrow z^2 + \bar{z}^2 + 2i(z - \bar{z}) - 2 = 0$: $(\forall z \in \mathbb{C} - \{-i\})$
 ب- استنتج (C) مجموعة النقط M ذات اللحق z و التي يكون من أجلها Z عددا حقيقي

التمرين السابع

- نعتبر في المستوى العقدي (P) النقط A, B, C التي ألحاقها على التوالي $a = \sqrt{3} + i$, $b = -2i$ و $c = -2\sqrt{3}$
 (1) حدد الشكل المثلثي للعدد a, b
 (2) أ- بين أن : $\frac{b-a}{b-c} = -i \frac{\sqrt{3}}{2}$
 ب- استنتج طبيعة المثلث ABC
 (3) حدد d لحق النقطة D كي يكون $ABCD$ مربع

التمرين الثامن

- نعتبر النقطتين $A; B$ ذات اللحق $z_A = \sqrt{3} + i$ و $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ على التوالي
 (1) حدد الشكل المثلثي للعدد z_B, z_A
 (2) أحسب $\frac{z_B}{z_A}$ و استنتج طبيعة المثلث OAB و حدد قياسا للزاوية $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$
 (3) نعتبر العدد $z_C = z_A + z_B$ و النقطة $C(z_C)$
 أ- ما هي طبيعة الرباعي $OACB$
 ب- حدد قياسا للزاوية $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ و استنتج أن $\arg(z_C) \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]$
 ج- استنتج قيمة كل من $\cos \frac{5\pi}{12}$; $\sin \frac{5\pi}{12}$

التمرين التاسع

- نعتبر العدد العقدي $Z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ و نضع $\theta \equiv \arg(Z) [2\pi]$
 (1) بين أن $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (دون حساب θ)

(2) أ- بين أن $Z^2 = 2\sqrt{2}(1+i)$

ب- حدد الشكل المثلثي للعدد $u = 1+i$ و استنتج أن $\theta = \frac{\pi}{8}$

ج- أحسب $\cos \frac{\pi}{8}$; $\sin \frac{\pi}{8}$

التمرين العاشر

نعتبر العددين $Z = (\sqrt{3}+2) + i$ و $Z_2 = 1 + (\sqrt{3}-2)i$ و نضع $\theta \equiv \arg(Z) [2\pi]$

و لتكن A , B نقطتان لحقاها z_1 ; z_2 على التوالي

(1) أ- بين أن $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (دون حساب θ)

ب- بين أن $z_1 z_2 = 4$ و استنتج أن $\arg(z_2) \equiv -\theta [2\pi]$

(2) أ- بين أن $\frac{Z}{Z_2} = (2 + \sqrt{3}) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$

ب- استنتج طبيعة المثلث OAB و حدد قياس الزاوية $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

ج- استنتج أن $\theta = \frac{\pi}{12}$

(3) بين أن $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

التمرين الحادي عشر

(1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ ما يلي :

$Z^2 + (1+i)Z + i = 0$	$Z^2 + 2(1-i)Z - 1 = 0$	$iZ^2 + (1+i)Z + 1 = 0$
$Z^2 - 2(\cos \alpha)Z + 1 = 0$	$Z^2 - (\sqrt{3}+9i)Z - 8(1-i\sqrt{3}) = 0$	$2iZ^2 + 2(1-i)Z + 3 = 0$
$(E) \quad Z^2 - m(1+i)Z + im^2 = 0$	$a \in \mathbb{C}$ حيث $Z^2 - 2Z + 1 + a^2 = 0$	$(Z^2 + 3Z - 2)^2 + (2Z^2 - 3Z + 2)^2 = 0$

(2) حدد الجذرين المربعين للعدد $-2 - 2i\sqrt{3}$ ثم حل المعادلة $Z^2 - (3+i\sqrt{3})Z + 2(1+i\sqrt{3}) = 0$

(3) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $Z^3 + 3(3-i)Z^2 + (24-9i)Z - 26i = 0$ (E)

بين أن المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا z_0 يتم تحديده ثم حل المعادلة (E)

(4) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $2iZ^3 + 2(2-i)Z^2 - (3+2i)Z + i = 0$ (E)

بين أن المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا z_0 يتم تحديده ثم حل المعادلة (E)

(5) أ- بين أن المعادلة $2Z^3 + (-7+i)Z^2 + (10-4i)Z - 8 + 4i = 0$ (E) علما أنها تقبل حلا حقيقيا a

ب- حدد الحلين الآخرين z_2 , z_1 للمعادلة (E) (نأخذ $\text{Im}(z_2) < 0$)

ج- حدد الشكل الجبري للعدد z_1^{2003}

د- نعتبر النقط $A(a)$, $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ ما هي طبيعة المثلث AM_1M_2

التمرين الثاني عشر
التمرين الثاني عشر

نضع $f(z) = z^3 + (1-i)z^2 + 2(1+i)z - 8i$

(1) بين أن المعادلة $f(z) = 0$ تقبل حلا تخيليا z_0 يتم تحديده

(2) أ- حدد الأعداد العقدية a, b, c بحيث $f(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$

ب- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $f(z) = 0$

ج- نعتبر النقط $A(1+i)$; $B(-2i)$; $C(-2+2i)$ أحسب العدد $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ و استنتج طبيعة المثلث

التمرين الثالث عشر
التمرين الثالث عشر

(1) حدد الشكل المثلثي لحلول المعادلة : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

(2) استنتج أن $z^5 - 1 = (z - 1) \left(z^2 - 2z \cos \frac{2\pi}{5} + 1 \right) \left(z^2 - 2z \cos \frac{4\pi}{5} + 1 \right)$

(3) حدد قيمتي $\cos \frac{4\pi}{5}$; $\cos \frac{2\pi}{5}$

التمرين الرابع عشر
التمرين الرابع عشر

نعتبر الحدودية $H(z) = z^6 - 2z^3 \cos(3\alpha) + 1$ حيث α عدد حقيقي

(1) بين أن حلول المعادلة $H(z) = 0$ تكتب $a_k = \left[1, -\alpha + \frac{2k\pi}{3} \right]$ و $b_k = \left[1, \alpha + \frac{2k\pi}{3} \right]$ حيث $k \in \{0, 1, 2\}$

(2) تحقق أن $\overline{b_2} = a_1$; $\overline{b_1} = a_2$; $\overline{b_0} = a_0$

أثبت أن $\cos(3\alpha) = 4 \cos \alpha \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right) \cos \left(\alpha + \frac{4\pi}{3} \right)$

التمرين الخامس عشر
التمرين الخامس عشر

نضع $f(x) = 4x^3 - 3x + \frac{1}{2}$

(1) أعط جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-1, 1]$

(2) استنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل ثلاث حلول في المجال $[-1, 1]$

(3) باستعمال الاخطاط بين أن $\sin^3 t = \frac{3}{4} \sin t - \frac{1}{4} \sin 3t$ و استنتج أن حلول المعادلة $f(x) = 0$

هي $\sin \frac{\pi}{18}$; $\sin \frac{5\pi}{18}$; $\sin \frac{7\pi}{18}$ ثم حدد قيمة $\sin \frac{\pi}{18} \sin \frac{5\pi}{18} \sin \frac{7\pi}{18}$

التمرين السادس عشر
التمرين السادس عشر

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E_\theta) \quad z^2 - 2z + \frac{1}{\cos^2 \theta} = 0$ حيث $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

(1) حدد z_1 ; z_2 حلي المعادلة (E_θ) (نأخذ z_1 بحيث $\text{im}(z_1) = \tan \theta$)

(2) حدد الشكل المثلثي لكل من z_1 ; z_2

(3) نعتبر في المستوى العقدي (P) النقطتين $M_1(z_1)$; $M_2(z_2)$ ما هي طبيعة المثلث OM_1M_2

(4) ليكن n من $\mathbb{N}^*$ حدد الشكل المثلثي لحلول المعادلة $z^{2n} - 2z^n + \frac{1}{\cos^2 \theta} = 0$

التمرين السابع عشر
التمرين السابع عشر

ليكن θ من المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

(1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 + 2 \cos \theta (1 + \cos \theta) z + (1 + \cos \theta)^2 = 0$ و أكتب الحلين على الشكل المثلثي

(2) حدد على الشكل المثلثي z_1 ; z_2 الجذرين المربعين للعدد $a = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} (-\cos \theta + i \sin \theta)$

(3) استنتج الشكل المثلثي ل z_3 ; z_4 الجذرين المربعين للعدد $\bar{a}$

(4) نضع $s_n = z_1^n + z_2^n + z_3^n + z_4^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

بين أن $s_{2p+1} = 0$ و أن $s_{2p} = (-1)^p 2^{p+2} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{2p} \cos(p\theta)$

التمرين الثامن عشر

ج- أ- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2z \cos \alpha + 1 = 0$ حيث α عدد حقيقي

ب- استنتج الشكل المثلثي لحلول المعادلة $(E') : z^{10} - 2z^5 \cos \alpha + 1 = 0$

(2) بين أن $(\forall z \in \mathbb{C}) : z^{10} - 2z^5 \cos \alpha + 1 = \prod_{k=0}^{k=4} \left(z^2 - 2z \cos \left(\frac{\alpha + 2k\pi}{5} \right) + 1 \right)$

(3) نضع $H(z) = z^{10} - 2z^5 \cos \alpha + 1 = 0$

أ- أحسب $H(1)$ و أثبت أن $\prod_{k=0}^{k=4} \sin^2 \left(\frac{\alpha}{10} + \frac{k\pi}{5} \right) = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{256}$

ب- ليكن α من المجال $]0, \pi[$ و نضع $K(\alpha) = \prod_{k=1}^{k=4} \sin \left(\frac{\alpha}{10} + \frac{k\pi}{5} \right)$ بين أن $K(\alpha) = \frac{1}{16} \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{10}}$

ج- استنتج قيمة $\sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5} \sin \frac{3\pi}{5} \sin \frac{4\pi}{5}$

التمرين التاسع عشر

(1) بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad e^{2ix} - 1 = 2i \sin x e^{ix}$

(2) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z+1)^n = e^{2ina}$ حيث $a \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}^*$

(3) نضع $P_n = \prod_{k=0}^{k=n-1} \sin \left(a + \frac{k\pi}{n} \right)$

أ- أحسب $\prod_{k=0}^{k=n-1} e^{i \left(a + \frac{k\pi}{n} \right)}$

ب- نعتبر $f(z) = (z+1)^n - e^{2ina}$ بين أن $P_n = \frac{\sin(na)}{2^{n-1}}$

التمرين العشرون

المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$. A , B , C ثلاث نقاط من الدائرة (O, R) ζ

الحاقها على التوالي هي a , b , c

(1) بين أن $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c}$

(2) نضع $w = \bar{b}c - b\bar{c}$

أ- بين أن العدد w تخيلي

ب- بين أن $(b+c)(\bar{b}-\bar{c})=w$ ثم استنتج أن $\frac{b+c}{b-c} = \frac{w}{(b-c)^2}$

ج- استنتج أن $\frac{b+c}{b-c}$ تخيلي

ب- لتكن H النقطة التي لحقها $a+b+c$

أ- حدد لحق كل من $\overline{AH}$ و $\overline{CB}$ بدلالة a, b, c ثم بين أن $[\pi] \equiv \frac{\pi}{2} (\overline{CB}, \overline{AH})$ ماذا تستنتج ؟

ب- بين أن H هي مركز تعامد المثلث ABC

التمرين الحادي والعشرون

لتكن $A(-2+3i)$ و $B(1-3i)$ نقطتين في المستوى العقدي (P).

نعتبر $M(z)$ حيث $z \neq -2+3i$ و نضع $Z' = \frac{z-1+3i}{z+2-3i}$

(1) حدد علاقة بين عمدة Z' و قياس الزاوية الموجهة $(\widehat{MA, MB})$

(2) أ- حدد أرسم المجموعتين $E_1 = \left\{ M(z) / \arg(Z') \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \right\}$ و $E_2 = \left\{ M(z) / |Z'| = 2 \right\}$

ب- حدد لحق النقطة F تقاطع المجموعتين E_1, E_2

التمرين الثاني والعشرون

لكل عدد عقدي z يخالف i نضع $f(z) = \frac{iz}{z-i}$

ب- أ- بين أن $(z \in i\mathbb{R}) \Leftrightarrow (f(z) \in i\mathbb{R})$

ب- حدد المجموعة $(E_1) = \{ M(z) / f(z) \in \mathbb{R} \}$

(2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $f(z) = 1 - 2z$

(3) نضع $z - i = re^{i\alpha}$

أ- حدد الشكل المثلثي للعدد $f(z) - i$

ب- حدد و أرسم المجموعتين :

$D = \left\{ M(z) / \arg(f(z) - i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \right\}$ و $\zeta = \left\{ M(z) / |f(z) - i| = \sqrt{2} \right\}$

التمرين الثالث والعشرون

نعتبر العدد $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و نضع $f(z) = z + j^2 \bar{z}$

(1) بين أن $|f(z)|^2 - 2|z|^2 = 2\operatorname{Re}(jz^2)$

(2) بين أن $j^2 f(z) \in \mathbb{R}$

(3) ليكن n من $\mathbb{N}^*$ نضع $f^1 = f$ و $f^n = f \circ f^{n-1}$ لكل $n > 1$

أ- أحسب $f^2(z)$

ب- بين أن $f^n(z) = 2^{n-1} f(z)$