الثانية بكالوريا علوم رياضية	الأعداد العقدية	الأستاذ : الحيان

التمرين 1 :

I نعتبر المعادلة :

$$(E): z\in\mathbb{C}; z^3-4(1-i)z^2+16(1-i)z+64i=0$$

1. تحقق من أن العدد $-4i$ حل للمعادلة (E) .
2. حل المعادلة (E) .
3. نعتبر العدد z_k بحيث: $z_k=\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k-\left(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$ و $k\in\mathbb{Z}$

أثبت أن: $z_k=\frac{i}{2^{k-1}}\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$ ثم استنتج أن: $z_{2001}=0$.

II المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$.

لتكن A صورة العدد z_A و النقطة B صورة العدد z_B بحيث :

$$z_A=2+2i\sqrt{3} \quad \text{و} \quad z_B=2-2i\sqrt{3}$$

1. أنشئ النقطة C صورة العدد z_C بحيث : $z_C=\frac{3}{2}z_A+z_B$.
2. حدد عمدة للعدد $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ و استنتج طبيعة المثلث ABC .

التمرين 2 :

نضع $\forall z\in\mathbb{C}^*: P(z)=z+\frac{4}{z}$

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E): P(z)=-2$.
2. نرمز ب z_1 و z_2 لحلي المعادلة (E) .

أ. أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .

ب. بين أن : $z_1^{2001}+z_2^{2001}=2^{2002}$.

3. المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$.

أ. لتكن النقط $A(\alpha)$ و $B\left(-1+\sqrt{3}\right)$ و $C\left(-1-i\sqrt{3}\right)$

حيث α عدد حقيقي موجب . حدد قيمة α لكي يكون المثلث ABC متساوي الأضلاع .

ب. بين أن: $\forall z\in\mathbb{C}^*: P(z)=\overline{P(z)}\Leftrightarrow\left(z-\bar{z}\right)\left(z\bar{z}-4\right)=0$

ج. استنتج (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها يكون $P(z)$ عددا حقيقيا .

د. تحقق من أن النقط A و B و C تنتمي الى المجموعة (Γ) .

التمرين 3 :

A نضع : $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ j esl l'entier de JACOBI

(j هو جذر من الرتبة الثالثة للوحدة : $j^3=1$)

1. تحقق من أن : $j^2=\bar{j}$ و أن $1+j+j^2=0$.
2. أكتب على الشكل المثلثي العددين العقديين $2i$ و $2ij$.

B نعتبر P و Q التطبيقين من $\mathbb{C}$ نحو $\mathbb{C}$ المعرفين كما يلي :

$$P(z)=\left(z-2i\bar{j}\right)Q(z) \quad \text{و} \quad Q(z)=z^2+2ij^2z-4j$$

1. أ. نعتبر المعادلة : $(E_1):\left(z\in\mathbb{C}; Q(z)=0\right)$

تحقق من أن المميز المختصر Δ' يساوي $\left(\sqrt{3}j^2\right)^2$

ب. حل المعادلة : (E_1) .

ج. أكتب حلي المعادلة (E_1) على الشكل المثلثي و على الشكل λi و λij حيث : $(\lambda\in\mathbb{R})$

2. أ. أنشر $P(z)$.

ب. استنتج حلول المعادلة:

$$(E):\left(z\in\mathbb{C}; z^3+8i=0\right)$$

3. لتكن a و b و c هي حلول المعادلة (E) بحيث :

$$\mathrm{Re}(c)>0 \quad \text{و} \quad \mathrm{Re}(b)<0 \quad \text{و} \quad \mathrm{Re}(a)=0$$

أ. تحقق من أن : $a+bj+cj^2=0$

ب. في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم ومباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ ؛ نعتبر على التوالي النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : a و b و c .

بين أن ABC مثلث متساوي الأضلاع .

التمرين 4 :

نضع :

$$\forall z\in\mathbb{C}-\{i\} \quad : \quad P(z)=\frac{2z-i}{z-i}$$

$$\text{و} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad / \quad z=x+iy$$

1. أ. حدد $\mathrm{Re}(P(z))$ بدلالة x و y , حيث :

$\mathrm{Re}(P(z))$ هو الجزء الحقيقي للعدد العقدي $P(z)$.

ب. المستوى العقدي $\wp$ منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. حدد (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من $\wp$ التي تحقق : $\mathrm{Re}(P(z))=0$.

2. أ. بين أن :

$$\forall z\in\mathbb{C}-\{i\}; \quad [P(z)=z]\Leftrightarrow\left[z^2-(2+i)z+i=0\right]$$

ب. حل المعادلة : $z\in\mathbb{C}; \quad z^2-(2+i)z+i=0$

ج. ليكن $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. أكتب على الشكل المثلثي كلا من العددين :

$$1+\cos(\theta)+i\sin(\theta)$$

$$\text{و} \quad 1-\cos(\theta)+i\sin(\theta)$$

د. استنتج الشكل المثلثي لكل من العددين :

$$\frac{2+\sqrt{3}+i}{2} \quad \text{و} \quad \frac{2-\sqrt{3}+i}{2}$$

التمرين 5 :

لتكن $(S_n)_{n\geq2}$ المتتالية العددية حيث:

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

1. بين بالترجع : **صيغة موافر** *Formule de Moivre*

$$\forall\theta\in\mathbb{R}; \forall n\in\mathbb{N};$$

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$$

2) نضع : $\forall n\geq2 \quad : \quad Z_n=\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

أحسب المجموع : $\sum_{k=0}^{n-1} Z_n^k$ لكل $n \geq 2$.

3. بين أن : $\forall n \geq 2 \quad : \quad \frac{2}{1-Z_n} = 1 + i \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$

4. استنتج أن : $\forall n \geq 2 \quad : \quad S_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$

5) أحسب $\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$.

التمرين 6 :

في المستوى العقدي المنسوب الى معلم متعامد ممنظم ومباشر $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ ؛ نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي a و b و c ؛ ونعتبر $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ متجهتين غير منعدمتين بحيث : $Aff\left(\vec{u_1}\right) = z_1$ و $Aff\left(\vec{u_2}\right) = z_2$

1. بين أن : $\boxed{\vec{u_1} \text{ و } \vec{u_2} \text{ مستقيميتان} \Leftrightarrow z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 = 0}$

2. بين أن : $\boxed{\vec{u_1} \perp \vec{u_2} \Leftrightarrow z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 0}$

3. بين أن : $\boxed{\vec{u_1}.\vec{u_2} = \operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right) = \frac{1}{2}\left(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2\right)}$

4. ليكن $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و Ω نقطة لحقها ω .

أ. ليكن R الدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{3}$.
بين أنه إذا كانت النقط M' , التي لحقها z' , هي صورة النقطة M , التي لحقها z , بالدوران R , فإن :
$\boxed{z' = -j^2 z - j\omega}$

ب) استنتج أن : ABC مثلث متساوي الأضلاع
$\Leftrightarrow \boxed{a + bj + cj^2 = 0 \text{ أو } a + bj^2 + cj = 0}$
$\Leftrightarrow \boxed{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0}$
$\Leftrightarrow \boxed{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0}$

ج. حدد الأعداد العقدية z التي من أجلها يكون المثلث ABC متساوي الأضلاع , حيث : $a = i$ و $b = z$ و $c = iz$.

5. بين أن : النقط A و B و C مستقيمية

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} \end{vmatrix} = 0$$

التمرين 7 :

1. بين أن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad : \quad e^{2ix} - 1 = 2i\sin(x)e^{ix}$

2. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :
$\boxed{(Z+1)^n = e^{2ina}}$ ؛ $(n \in \mathbb{N}^* \text{ و } a \in \mathbb{R})$

3. نضع : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad : \quad P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$

أثبت أن : $P_n = \frac{\sin(na)}{2^{n-1}}$

التمرين 8 : الجذور من الرتبة الخامسة للوحدة . إنشاء المخمس المنتظم .

$(Pentagone - régulier)$.

ليكن $\boxed{z_0 = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)}$

1. نضع : $\alpha = z_0 + z_0^4$ و $\beta = z_0^2 + z_0^3$

أ. بين أن : $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$
واستنتج أن α و β هما حلا المعادلة :
$(*) : X^2 + X - 1 = 0$

ب. أوجد α بدلالة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

ج. حل المعادلة $(*)$ واستنتج قيمة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

2. لتكن A_0 و A_1 و A_2 و A_3 و A_4 النقط التي ألحاقهاعلى التوالي هي 1 و z_0 و z_0^2 و z_0^3 و z_0^4 في الستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم ومباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

أ. لتكن H نقطة تقاطع المستقيم (A_1A_4) و المحور $\left(O,\vec{u}\right)$.
بين أن : $\boxed{\overline{OH} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}$

ب. الدائرة التي مركزها النقطة Ω , ذات اللحق $-\frac{1}{2}$, والمارة من النقطة B ذات اللحق i , تقطع المحور $\left(O,\vec{u}\right)$ في نقطتين M و N (نسمي M النقطة التي أفصولها موجب)
بين أن : $\overline{OM} = \alpha$ و $\overline{ON} = \beta$
و أن H منتصف القطعة $[OM]$.

ج. استنتج إنشاء لمخمس منتظم مركزه O ومارا من نقطة A_0 .

التمرين 9 :

نعتبر الدالة P المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :
$$\forall x \in \mathbb{R} : P(x) = \frac{1}{2i}\left[\left(1 + i\frac{x}{8}\right)^8 - \left(1 - i\frac{x}{8}\right)^8\right]$$

1. بين أن P دالة حدودية معاملاتها أعداد حقيقية . ثم حدد درجتها و أدرس زوجيتها.

2. أ. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^8 = 1$, نعطي الحلول على شكلها الجبري .
ب. حل المعادلة : $P(x) = 0 \quad : \quad x \in \mathbb{R}$

التمرين 10 :

نعتبر الدالة الحدودية P من $\mathbb{C}$ الى $\mathbb{C}$ المعرفة بما يلي : $P(z) = (z-i)^n - \left(i - \overline{z}\right)^n$
حيث $n \in \mathbb{N}^*$ و $\overline{z}$ مرافق العدد العقدي z .

1. لتكن A و M و M' صور الأعداد i و z و $\overline{z}$ على التوالي في المستوى العقدي .

أ. بين أنه إذا كان z حلا للمعادلة $P(z) = 0$ فإن: $AM = AM'$

ب. استنتج أنه إذا كان z حلا للمعادلة $P(z) = 0$ فإن: z عدد حقيقي .

2) حل المعادلة $P(z) = 0$.

التمرين 11 :

يكن f التطبيق من $\mathbb{C}-\{i\}$ نحو $\mathbb{C}-\{i\}$

المعرف بما يلي : $f(z)=\dfrac{iz}{z-i}$

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$ ؛ نعتبر النقطة B ذات اللحق i ؛ ونربط كل نقطة M بلحقها z .

1. حدد المجموعتين : $(E_1)=\{M(z)/\ f(z)\in\mathbb{R}\}$

و $(E_2)=\{M(z)/\ f(z)\in i\mathbb{R}\}$

2. حل في $\mathbb{C}-\{i\}$ المعادلة : $f(z)=-2z+1$.

3. ليكن $z\in\mathbb{C}-\{i\}$. نعتبر r معيار $z-i$ و α قياسا لعمدة $z-i$.

أ. أكتب $f(z)-i$ على الشكل المثلثي .

ب. حدد (C) , مجموعة النقط $M(z)$ بحيث : $|f(z)-i|=\sqrt{2}$

ج. حدد (D) , مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون $\dfrac{\pi}{4}$ قياسا لعمدة $f(z)-i$.

د. حدد z_0 بحيث $f(z_0)=1+2i$.

لتكن A النقطة ذات اللحق z_0 .

تحقق من أن A تنتمي إلى (C) و (D).

أرسم (C) و (D) .

التمرين 12 :

في المستوى الأقليدي $\wp$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$, نعتبر النقطتين $A(i)$ و $A'(-i)$ وليكن f التطبيق من $\mathbb{C}-\{i\}$ نحو $\mathbb{C}$ والمعرف بما يلي: $f(z)=\dfrac{\overline{z}(z-i)}{\overline{z}+i}$

وليكن F التطبيق من $\wp-\{A\}$ نحو $\wp$ الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ حيث : $z'=f(z)$.

1. أ. أثبت أنه إذا كان $z\neq 0$ و $z'\neq 0$ فإن :

$|z|=|z'|$ و $\arg(z')\equiv -\arg(z)+2\arg(z-i)[2\pi]$

(لاحظ أن $z-i$ و $\overline{z}+i$ مترافقان)

ب. بين أنه إذا كان $|z|=1$ فإن $f(z)=-i$.

2) أ. حدد مجموعة النقط الصامدة بالتطبيق F .

ب. ماهي مجموعة النقط $M(z)$ بحيث تكون $f(z)$ على شكل ai مع a عنصر من $\mathbb{R}$ ؟

3. أ. أثبت أن : $z'+i=\dfrac{z\overline{z}-1}{|\overline{z}+i|^2}(z-i)$

وأن : $z'-z=\dfrac{-i(z+\overline{z})}{|\overline{z}+i|^2}(z-i)$

ب. استنتج أن المتجهتين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{A'M'}$ مستقيميتان .

وأن $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{MM'}$ متعامدتان .

ج. أعط طريقة للإنشاء الهندسي لصورة M بالتطبيق F.

التمرين 13 :

α عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $[0,2\pi[$.

1. أ. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2+i\left(2^{\alpha+1}.\sin(\alpha)\right)z-2^{2\alpha}=0$

ب. أكتب الحلين على شكلهما المثلثي .

2. المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر A و B صورتي حلي المعادلة السابقة .

حدد α لكي يكون المثلث OAB متساوي الأضلاع .

التمرين 14 :

ليكن θ عددا حقيقيا . لكل z من $\mathbb{C}$. نضع :

$$P(z)=z^3+\left(1+3ie^{i\theta}\right)z^2+\left(1+i\left(1+3e^{i\theta}\right)\right)z+(3i-3)e^{i\theta}$$

1. بين أن $z_1=-3ie^{i\theta}$ حل للمعادلة : $(E):z\in\mathbb{C};P(z)=0$

2. أ. حدد العددين العقديين a و b بحيث :

$P(z)=\left(z+3ie^{i\theta}\right)\left(z^2+az+b\right)$ لكل z من $\mathbb{C}$.

ب. ليكن z_2 و z_3 الحلين الآخرين للمعادلة (E) .

حدد z_2 و z_3 (z_2 هو الحل التخيلي الصرف)

3) أ) أكتب z_1 و z_2 و z_3 على الشكل المثلثي .

ب) نضع : $\theta=\dfrac{\pi}{10}$. حدد الشكل الجبري للعدد العقدي α

حيث : $\alpha=z_1^5+z_2^5+z_3^5$

التمرين 15 :

لكل عدد عقدي z ؛ نضع :

$$P(z)=2iz^3+2(2-i)z^2-(3+2i)z+i$$

1. أ. أوجد العدد الحقيقي α بحيث : $P(i\alpha)=0$

ب. تحقق أن: $P(z)=(z-\alpha i)Q(z)$

حيث: $Q(z)=\left((1+i)z-i\right)^2$

2. نعتبر المعادلة :

$$(E):z\in\mathbb{C}\quad:\quad z^2-\left(m-i(m+1)\right)z-im^2-m=0$$

حيث m بارامتر حقيقي .

أ. بين أن مميز المعادلة (E) هو $Q(m)$.

ب. حدد الجدرين z' و z'' للمعادلة (E) علما أن : $|z'|=|m|$

3. نضع $m=2\cos(\theta)+i\sin(\theta)$ حيث $\theta\in[0,\pi]$,

ونعتبر المجموعة : $(C)=\{M(z'')/\theta\in[0,\pi]\}$

أ. بين أن (C) جزء من إهليلج ينبغي تحديد معادلته ورؤوسه في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

ب. أنشئ (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4. نضع : $m=\dfrac{2}{\cos(\theta)}+3i\tan(\theta)$ حيث $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

ونعتبر المجموعة : $(C')=\left\{M(z')/\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\right\}$

أ. بين أن (C') جزء من هذلول (H) ينبغي تحديد معادلته ورأسيه ومقاربيه في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

ب. أنشئ (H) و (C') في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

التمرين 16 :

لكل z من المجموعة $\mathbb{C}$ نضع :

$$t(z)=z^2-\sqrt{2}z+i\sqrt{3}$$

1. نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $t(z)=-i\sqrt{3}$ ؛
وليكن z_1 و z_2 حليها بحيث z_1 يحقق : $\operatorname{Im}(z_1)<0$.
أ. حدد z_1 و z_2 .
ب. أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .
ج. حدد مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية n بحيث: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n\in\mathbb{R}$
2. المستوى العقدي $(\wp)$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$؛
أ. نعتبر المجموعة : $E=\{M(z)/t(z)\in i\mathbb{R}\}$.
بين أن E هذلول يتم تحديد مركزه ورأسيه ومقاربيه في المعلم $(O,\vec{u},\vec{v})$.
ب. لتكن (C) الدائرة التي مركزها النقطة Ω ذات اللحق $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وشعاعها $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و M النقطة ذات اللحق z و M' النقطة ذات اللحق $t(z)$. بين أنه إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة (C) فإن M' تنتمي إلى دائرة (C') يتم تحديد مركزها وشعاعها.
ج. أنشئ E و (C) و (C') في المعلم $(O,\vec{u},\vec{v})$.

التمرين 17 :

ليكن θ عددا حقيقيا بحيث : $0\le\theta<2\pi$.
نضع : $p=5\cos(\theta)+3i\sin(\theta)$.
نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) التالية : $(E):z^2-2pz+16=0$.
1. أ. تحقق أن : $p^2-(3\cos(\theta)+5i\sin(\theta))^2=16$.
ب. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .
نرمز ب z_1 و z_2 لحلي المعادلة (E) بحيث : $|z_1|<|z_2|$.
2. المستوى العقدي $(\wp)$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$؛ نعتبر النقطتين M_1 و M_2 اللتين لحقاهما على التوالي هما z_1 و z_2 .
أ. بين أنه عندما يتغير العدد θ في المجال $[0,2\pi[$, فإن النقطة M_1 تتغير على دائرة (C) ينبغي تحديد معادلة لها .
ب. لتكن P منتصف القطعة $[M_1M_2]$. ولتكن (Γ) مجموعة النقط P عندما يتغير العدد θ في المجال $[0,2\pi[$.
بين أن (Γ) إهليلج بؤرتاه هما النقطتان F و F' اللتين لحقاهما على التوالي هما 4 و -4 .
3. أ. بين أنه لكل عددين عقديين a و b من $\mathbb{C}-\{4\}$, لدينا :
$$\left(\frac{b+4}{b-4}=-\frac{a+4}{a-4}\right)\Leftrightarrow(ab=16)$$
ب. استنتج أن : $\frac{z_2+4}{z_2-4}=-\frac{z_1+4}{z_1-4}$.
ج. بين أن : $\overline{\left(\overrightarrow{M_1F},\overrightarrow{M_1F'}\right)}\equiv\pi+\overline{\left(\overrightarrow{M_2F},\overrightarrow{M_2F'}\right)}\quad[2\pi]$

4. أ. بين أن معادلة المماس (T) للمنحنى (Γ) في النقطة P هي :
$$3x\cos(\theta)+5y\sin(\theta)=15$$
ب. بين أن المماس (T) عمودي على المستقيم (M_1M_2) .

التمرين 18 :

1. حل في $\mathbb{C}$, المعادلة : $z^2+z+1=0$.
2. لكل عدد عقدي z حيث : $z=e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$
مع $-\pi\le\theta\le\pi$ و $\theta\ne\frac{2\pi}{3}$ و $\theta\ne-\frac{2\pi}{3}$ ؛
نضع : $z'=\frac{1}{z^2+z+1}$.
أ. تحقق من أن : $1+z+z^2=z(1+z+\bar{z})$.
ب. أحسب معيار وعمدة z' بدلالة θ .
ج. نضع $z'=x+iy$ حيث x و y عددان حقيقيان .
بين أن : $x^2+y^2=(1-2x)^2$.
د. استنتج أن النقطة M ذات اللحق z' , تنتمي إلى هذلول يتم تحديد مركزه ورأسيه ومقاربيه .

التمرين 19 :

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$؛ ليكن a عددا عقديا غير منعدم شكله الجبري هو : $a=\alpha+i\beta$.
1. لتكن (H) مجموعة النقط M التي لحقها z يحقق :
$z^2-(\bar{z})^2=a^2-(\bar{a})^2$. ($\bar{u}$ هو مرافق العدد العقدي u)
أ. حدد طبيعة (H) .
ب. أنشئ (H) في الحالة : $a=1+i$.
2. لتكن (C) مجموعة النقط M التي لحقها z يحقق :
$(z-a)(\bar{z}-\bar{a})=4a\bar{a}$.
أ. حدد طبيعة (C) .
ب. أنشئ (C) في الحالة : $a=1+i$.
3. نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$, النظمة التالية :
$$(S):\begin{cases}z^2-(\bar{z})^2=a^2-(\bar{a})^2\\(z-a)(\bar{z}-\bar{a})=4a\bar{a}\end{cases}$$
ونضع : $u=z-a$.
أ. بين أن النظمة (S) تكافئ النظمة :
$$(S'):\begin{cases}u\bar{u}=4a\bar{a}\\(u+2a)\left(u^3-8a(\bar{a})^2\right)=0\end{cases}$$
ب. نضع $a=re^{i\theta}$ حيث $r>0$ و $-\pi<\theta\le\pi$.
حدد ؛ بدلالة r و θ؛ ألحاق نقط تقاطع (C) و (H) .
ج. استنتج أن تقاطع (C) و (H) يتضمن ثلاث نقط هي رؤوس لمثلث متساوي الأضلاع .

التمرين 20 :

في الستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ؛ نعتبر النقط I و A و M و M' التي ألحاقها على التوالي : 1 و 2 و z و z' حيث z و z' عددان عقديان .

1. بين أن المخروطي (H) ؛ ذا المعادلة $x^2-y^2-2x=0$ ؛ هذلول محددا رأسيه ومقاربيه .
2. بوضع : $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$ حيث x و y و x' و y' أعداد حقيقية ؛ أوجد بدلالة x و y و x' و y' الجزء الحقيقي للعدد : $(z'-1)^2+(z-1)^2-1$.
3. نفترض أن : $(z'-1)^2+(z-1)^2=1$ بحيث : $z\notin\{0,1,2\}$ و $z'\notin\{0,1,2\}$.

أ. بين أنه إذاكان $M\in(H)$ فإن M' تنتمي إلى اتحاد مستقيمين يجب تحديد معادلة ديكارتية لكل منهما .

ب. بين أن : $IM'^2=OM\times MA$

و أن : $(\overline{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{IM'}})\equiv(\overline{\overrightarrow{IM'},\overrightarrow{MA}})[2\pi]$

ج. بين أن :

$$MA^2+MO^2+2IM'^2=2\left[z\bar{z}-(z+\bar{z})+z'\bar{z'}-(z'+\bar{z'})+3\right]$$

د. بين أن : $MA+MO=M'A+M'O$.

التمرين 21 :

نعتبر التطبيق f_a من $\mathbb{C}-\{a\}$ نحو $\mathbb{C}-\{a\}$ المعرف بما يلي : $f_a(z)=\dfrac{az}{z-a}$ حيث $a\in\mathbb{C}^*$.

1. بين أن : $f_a(z)\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow |z|^2\operatorname{Re}(a)=|a|^2\operatorname{Re}(z)$
2. ليكن $z\in\mathbb{C}-\{a\}$.

نضع : $r=|z-a|$ و $\arg(z-a)\equiv\theta[2\pi]$.

أحسب $|f_a(z)-a|$ بدلالة r و $|a|$ ؛

وأحسب $\arg(f_a(z)-a)$ بدلالة θ و $\arg(a)$.

3. نضع في ما يلي : $a=-1+i$ ونعتبر في المستوى $(\wp)$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$,

المجموعات : $(C)=\{M(z)/|f_a(z)-a|=2\}$

و $(E)=\{M(z)/\ f_a(z)\in i\mathbb{R}\}$

و $(D)=\left\{M(z)/\arg(f_a(z)-a)\equiv\dfrac{3\pi}{4}[2\pi]\right\}$

أ. حدد كلا من (E) و (C) وبين أن (D) نصف مستقيم طرفه $A(a)$ محروم من $A(a)$ محددا معادلة ديكارتية له .

ب. ليكن z_0 عنصرا من $\mathbb{C}-\{a\}$ و النقطة B ذات اللحق z_0 بحيث $B\in(D)\cap(C)$.

أكتب $f(z_0)$ على الشكل الجبري ثم استنتج z_0 .

ج. أنشئ المجموعات (C) و (E) و (D) .

التمرين 22 :

لتكن $U=\{z\in\mathbb{C}/|z|=1\}$

1. بين أن : $-1\le\operatorname{Re}(z)\le1$ و $\forall z\in\mathbb{C}:-1\le\operatorname{Im}(z)\le1$
2. ليكن $(a,b)\in U^2$.

أ. بين أن : $\dfrac{(a+b)^2}{ab}=a\bar{b}+\bar{a}b+2$.

ب. استنتج أن : $\dfrac{(a+b)^2}{ab}$ عدد حقيقي موجب .

3. ليكن z_1 و z_2 عددين عقديين غير منعدمين .

نعتبر في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$, النقطتين M_1 و M_2 اللتين لحقاهما على التوالي هما z_1 و z_2 . وليكن t لحق النقطة G مرجح النظمة المتزنة $\left\{\left(M_1,\dfrac{1}{|z_1|}\right);\left(M_2,\dfrac{1}{|z_2|}\right)\right\}$. نضع : $a=\dfrac{z_1}{|z_1|}$ و $b=\dfrac{z_2}{|z_2|}$.

أ. بين أن : $\dfrac{t^2}{z_1z_2}=\dfrac{(a+b)^2}{ab}\times\dfrac{|z_1||z_2|}{(|z_1|+|z_2|)^2}$.

ب. نفترض أن : $a+b\neq0$.

بين أن المستقيم (OG) هو حامل منصف الزاوية الموجهة $(\overline{\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2}})$

4. **تطبيق :** نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهماعلى التوالي هما $2+i$ و $-2+11i$. حدد معادلة ديكارتية لحامل منصف الزاوية الموجهة $(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$.

التمرين 23 :

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

لكل z من $\mathbb{C}$ ؛ نضع $f(z)=z^2-2jz-1$ حيث $j=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $f(z)=0$.
2. ليكن التطبيق :

$$\begin{array}{cccc} F & : & \wp & \to & \wp \\ & & M(z) & \mapsto & M'(f(z)) \end{array}$$

ولتكن (C) الدائرة التي مركزها $A(j)$ وشعاعها r و (D) المستقيم الذي يمر من A ومعامله الموجه $\tan(\theta)$ حيث $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$.

أ. تحقق من أن : $\forall z\in\mathbb{C}: f(z)-j=(z-j)^2$

ب. حدد طبيعة صورة كل من المجموعتين (C) و (D) بالتطبيق F .

التمرين 24 :

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

1. نعتبر التطبيق φ المعرف على المجموعة $\mathbb{C}^*$ بما يلي :

$$\forall z\in\mathbb{C}^*:\varphi(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

أ. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $\varphi(z)=i$.

ب. نضع $z=re^{i\theta}$ حيث : $r>0$ و $0\le\theta<2\pi$.

عبر بدلالة r و θ ؛ عن الجزء الحقيقي وعن الجزء التخيلي للعدد العقدي $\varphi(z)$.

2. نعتبر التطبيق f من $\wp^*$ نحو $\wp$ الذي يربط كل نقطة $M(z)$ $(z\neq0)$ بالنقطة $M'(\varphi(z))$. لتكن (C_r) الدائرة التي مركزها O وشعاعها r .

أ. بين أن : $M(z)\in(C_r)\Leftrightarrow(\exists\theta\in[0,2\pi])/z=re^{i\theta}$

ب. بين أن صورة الدائرة (C_r) بالتطبيق f توجد ضمن مخروطي (E_r) يجب تحديد معادلة مختصرة له , ثم استنتج أن (E_r) إهليلج بؤرتاه $F(1)$ و $F'(-1)$.

3. لتكن $M(z)$ نقطة من (E_r) و $M'(z')$ نقطة من المستوى $\wp$ بحيث : $z'^2+z^2=1$.

أ. بين أن: $OM'^2=MF\times MF'$

(لا حظ أن: $z'^2=(1-z)(1+z)$)

ب. استنتج أن : $2\arg(z')\equiv\arg(1-z)+\arg(-1-z)+\pi[2\pi]$.

ج. استنتج أن نصف المستقيم $[OM')$ عمودي على منصف الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{MF},\overrightarrow{MF'})$.

د. بين أن : $(MF+MF')^2=2(|z|^2+|z'|^2+1)$

ثم استنتج أن النقطة $M'(z')$ تنتمي إلى الإهليلج (E_r).

أحسب بدلالة r المجموع : $|z|^2+|z'|^2$.

التمرين 25 :

1. أ. حل المعادلة $z\in\mathbb{C}:z^2+(1+i)z+2i=0$

نعتبر التطبيق P حيث : $P(z)=z^3+2-2i$

أحسب $P(1+i)$ واستنتج تعميلا ل $P(z)$ ثم أعط؛ على شكلهما الجبري ؛ حلي المعادلة $P(z)=0\quad:\quad z\in\mathbb{C}$.

ب. أعط على شكل مثلثي الجذور المكعبة للعدد العقدي $-2+2i$

ج. استنتج مما سبق $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2. أ. أثبت أنه توجد ثلاث متتاليات هندسية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ للأعداد العقدية بحيث $u_3=-i$ و $u_6=2+2i$ (أحسب الأساس q و الحد الأول u_0 لكل متتالية من المتتاليات المحصل عليها)

ب. لتكن $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العقدية المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} z_0=\frac{1}{4}(-1+i) \\ z_{n+1}=(1+i)z_n \quad ; \quad n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

✓ أحسب z_n بدلالة n .

✓ أكتب z_n على شكل مثلثي .

✓ حدد قيم العدد الصحيح n لكي يكون z_n حقيقيا .

التمرين 26 :

1. أ. أحسب $(3+\sqrt{3}i)^2$.

ب. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$Z^2+2(1-\sqrt{3}i)Z-8(1+\sqrt{3}i)=0$$

2. نرمز بالأعداد z_1 و z_2 و z_3 و z_4 لحلول المعادلة:

$$(E):\quad z\in C,\quad z^4+2(1-\sqrt{3}i)z^2-8(1+\sqrt{3}i)=0$$

أ. أكتب على الشكل الجبري حلول المعادلة (E) .

ب. أحسب z_1^6 و z_2^6 و z_3^6 و z_4^6 .

3. أ. أحسب $(\sqrt{3}-i)^3$ و $(-8i)^2$.

ب. حدد على الشكل الجبري حلول المعادلة :

$$z\in\mathbb{C}\quad:\quad z^6+64=0$$

التمرين 27 :

لكل عدد عقدي z مخالف للعدد 1- ؛ نضع :

$$f(z)=\frac{iz-1}{(z+1)^2}$$

1. أ. حدد العدد الحقيقي y بحيث : $f(iy)=iy$.

ب. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E):\ f(z)=z$.

نرمز ب z_0 و z_1 و z_2 لحلول المعادلة (E) حيث :

$\Re e(z_0)=0$ و $\Re e(z_1)>\Re e(z_2)$.

2. أ. تحقق أن : $z_1+1=e^{i\frac{11\pi}{6}}$ و $z_2+1=e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

ب. استنتج الكتابة المثلثية لكل من العددين z_1 و z_2 .

3. في هذا السؤال نفترض أن $z=e^{i\alpha}$ حيث $0\le\alpha<\pi$.

أ. بين أن : $f(z)=izf(z)$.

ب. حدد α إذا علمت أن : $f(z)+\overline{f(z)}=0$.

ج. أكتب $f(z)$ على الشكل $f(z)=re^{i\varphi}$ حيث : $(r,\varphi)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$.

4. حدد z إذا علمت أن : $\begin{cases}|z|=1\\ \Re e(f(z))=\frac{1}{2}\end{cases}$.

التمرين 28 :

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ؛ نعتبر المنحنى (C_m) الذي معادلته هي :

$$\frac{x^2}{10-m}+\frac{y^2}{2-m}=1\quad;\quad m\in\mathbb{R}\setminus\{2,10\}$$

I. 1. ناقش حسب قيم m ؛ طبيعة المنحنى (C_m) .

2. إذا كان (C_m) مخروطيا ؛ أعط عناصره المميزة.

(المركز ؛ البؤرتان ؛ المقاربان إن وجدا)

3. أرسم (C_1) .

II. نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$(E):\quad z^2-(6\cos(\alpha))z+1+8\cos^2(\alpha)=0$$

حيث : $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

لتكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) و$(\Im m(z_1)>0)$ و M_1 و M_2 النقطتين ذات اللحقين z_1 و z_2 على التوالي .

2. أ. تحقق أن : $M_1\in(C_1)$.

ب. بين أنه توجد نقطتان P_1 و P_2 من (C_1)حيث يكون فيهما المماس للمنحنى (C_1) موازيا للمستقيم (OM_1) .

ج. تحقق أن : $OM_1^2+OP_1^2=OM_2^2+OP_2^2$.