

ملخص درس الأعداد العقدية

ثانوية الجولان التأهيلية - بيوكري -
نيابة أشتوكة أيت باها

الثانية علوم رياضية

الأستاذ أحمد مومني

I - جذر مربع عددي عقدي

$$u^2 = Z \Leftrightarrow Z \text{ جذر مربع العدد العقدي } Z$$

الجدول التالي يحدد كيفية تحديد جذر مربع عدد عقدي مكتوب على شكله الجبري في كل الحالات الممكنة :

العدد العقدي على شكله الجبري	الجذرين المربعين للعدد العقدي	
i	$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$ و $-\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$	
$-i$	$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$ و $-\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$	
ib $b \in \mathbb{R}^*$	$b > 0$	$\sqrt{\frac{b}{2}}(1+i)$ و $-\sqrt{\frac{b}{2}}(1+i)$
	$b < 0$	$\sqrt{\frac{-b}{2}}(1-i)$ و $-\sqrt{\frac{-b}{2}}(1-i)$
$a \in \mathbb{R}$	$a > 0$	$\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$
	$a < 0$	$i\sqrt{-a}$ و $-(i\sqrt{-a})$
نقوم بحل النظام التالية: $\begin{cases} (x+iy)^2 = a+ib \\ x+iy ^2 = a+ib \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$ حيث: $x+iy$ جذر مربع العدد العقدي $a+ib$		
$a+ib$ $(a,b) \in (\mathbb{R}^*)^2$		

(II) للحق نقطة و صورة عدد عقدي

نرمز ب $aff(M)$ أو Z_M للحق النقطة M في المستوى العقدي
لدينا التعريف التالي :

$$M(a,b) \Leftrightarrow aff(M) = a + ib$$

بعض الحالات الخاصة :

صورته في المستوى العقدي	العدد العقدي
$M(0,1)$	i
$M(0,-1)$	$-i$
$M(1,0)$	1
$M(-1,0)$	$1-$

خصائص أساسية :

$$\begin{aligned} aff(\vec{u} + \vec{v}) &= aff(\vec{u}) + aff(\vec{v}) \\ aff(\alpha \vec{u}) &= \alpha aff(\vec{u}) \\ \|\vec{u}\| &= |aff(\vec{u})| \end{aligned}$$

$$aff(\overrightarrow{AB}) = aff(B) - aff(A)$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB = |aff(B) - aff(A)|$$

$$\frac{aff(\vec{v})}{aff(\vec{u})} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ مستقيمتين}$$

$$\frac{aff(B) - aff(A)}{aff(C) - aff(A)} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{النقط } A \text{ و } B \text{ و } C \text{ مستقيمية}$$

$$\frac{aff(B) - aff(A)}{aff(D) - aff(C)} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (AB) // (CD)$$

(III) - خاصيات وقواعد أساسية

العدد العقدي	معيان العدد العقدي	عمدة العدد العقدي بترديد 2π	الكتابة $[r, \theta]$
$-Z$	$ -Z = Z $	$\arg(-Z) = \pi + \arg(Z)$	$-[r, \theta] = [r, \theta + \pi]$
$\bar{Z}$	$ \bar{Z} = Z $	$\arg(\bar{Z}) = -\arg(Z)$	$[r, \theta] = [r, -\theta]$
ZZ'	$ ZZ' = Z Z' $	$\arg(ZZ') = \arg(Z) + \arg(Z')$	$[r, \theta][r', \theta'] = [rr', \theta + \theta']$
$\prod_{k=1}^n Z_k$	$\left \prod_{k=1}^n Z_k \right = \prod_{k=1}^n Z_k $	$\arg\left(\prod_{k=1}^n Z_k\right) = \sum_{k=1}^n \arg(Z_k)$	$\prod_{k=1}^n [r_k, \theta_k] = \left[\prod_{k=1}^n r_k, \sum_{k=1}^n \theta_k \right]$
$Z^n \quad (n \in \mathbb{Z})$	$ Z^n = Z ^n$	$\arg(Z^n) = n \arg(Z)$	$[r, \theta]^n = [r^n, n\theta]$
$\frac{1}{Z}$	$\left \frac{1}{Z} \right = \frac{1}{ Z }$	$\arg\left(\frac{1}{Z}\right) = -\arg(Z)$	$\frac{1}{[r, \theta]} = \left[\frac{1}{r}, -\theta \right]$
$\frac{Z}{Z'}$	$\left \frac{Z}{Z'} \right = \frac{ Z }{ Z' }$	$\arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = \arg(Z) - \arg(Z')$	$\frac{[r, \theta]}{[r', \theta']} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta' \right]$

العدد العقدي	عمدة العدد العقدي بترديد 2π
$Z = a$	$a > 0$
	$a < 0$
$Z = ib$	$b > 0$
	$b < 0$

$$\begin{aligned} \sin \theta + i \cos \theta &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ \cos \theta - i \sin \theta &= \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) \\ -\cos \theta + i \sin \theta &= \cos(\pi - \theta) + i \sin(\pi - \theta) \\ -\cos \theta - i \sin \theta &= \cos(\pi + \theta) + i \sin(\pi + \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= [1, 0] \\ -1 &= [1, \pi] \\ i &= \left[1, \frac{\pi}{2}\right] \\ -i &= \left[1, -\frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

الشكل المثلثي
لبعض الحالات
الخاصة

$$\begin{aligned} \overline{(\vec{u}, \vec{v})} &= \arg\left(\frac{\text{aff}(\vec{v})}{\text{aff}(\vec{u})}\right) [2\pi] \\ \overline{(\overline{AB}, \overline{CD})} &= \arg\left(\frac{\text{aff}(D) - \text{aff}(C)}{\text{aff}(B) - \text{aff}(A)}\right) [2\pi] \end{aligned}$$

قياس الزاوية الموجهة

الإخطاط

الإخطاط: حذف الأس باستعمال صيغتي أولير أو الأعداد المترافقة + حدانية نيوتن

$$\begin{matrix} \cos nx \\ \sin nx \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \cos^n x \\ \sin^n x \end{matrix}$$

نستعمل صيغة موافر + حدانية نيوتن

صيغ أولير

$$\begin{aligned} \cos nx &= \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \\ \sin nx &= \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{aligned}$$

طريقة الأعداد المترافقة

$$\begin{aligned} Z^n &= \cos nx + i \sin nx \\ \bar{Z}^n &= \cos nx - i \sin nx \\ Z^n + \bar{Z}^n &= 2 \cos nx \\ Z^n - \bar{Z}^n &= 2i \sin nx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z &= \cos x + i \sin x \\ \bar{Z} &= \cos x - i \sin x \\ Z + \bar{Z} &= 2 \cos x \\ Z - \bar{Z} &= 2i \sin x \end{aligned}$$

(IV) الكتابة العقدية للتحويلات الاعتيادية:

نعتبر التحويلات الاعتيادية التالية

- $R(\Omega, \alpha)$ الدوران الذي المركز Ω و زاويته α

- $t_{\vec{u}}$ الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$

- $h(\Omega, k)$ التحاكي ذو المركز Ω و النسبة k

نربط كل نقطة M من المستوى العقدي ذات اللق Z بصورتها بإحدى التحويلات الاعتيادية M' ذات اللق Z' فنحصل على نتائج الجدول أسفله:

الصيغة العقدية	العلاقة المتجهية	التحويل الاعتيادي
$Z' - \omega = (Z - \omega)e^{i\alpha}$	$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \overrightarrow{(\Omega M, \Omega M')} = \alpha [2\pi] \end{cases}$	الدوران $R(\Omega, \alpha)$ بحيث $aff(\Omega) = \omega$
$Z' = Z + a$	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	الإزاحة $t_{\vec{u}}$ بحيث $aff(\vec{u}) = a$
$Z' - \omega = k(Z - \omega)$	$\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$	التحاكي $h(\Omega, k)$ بحيث $aff(\Omega) = \omega$