

الأعداد العقدية

مبرهنة

توجد مجموعة \mathbb{C} تتضمن \mathbb{R} و تحقق:

$$(i) \text{ يحتوي } \mathbb{C} \text{ على عنصر غير حقيقي } i \text{ و يحقق } i^2 = -1$$

$$(ii) \text{ كل عنصر من } \mathbb{C} \text{ يكتب بكيفية و حيدة على الشكل: } a + ib \text{ بحيث } (a; b) \in \mathbb{R}^2$$

(iii) المجموعة \mathbb{C} مزودة بعمليتي الجمع و الضرب تمددان نفس العمليتين في \mathbb{R} و لهما نفس

الخصائص

خاصية

$$\text{ليكن } (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ و } (a'; b') \in \mathbb{R}^2 \text{ فإن } a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a' \text{ و } b = b'$$

$$\text{ليكن عدد عقدي } z = a + ib \text{ حيث } (a; b) \in \mathbb{R}^2$$

العدد a يسمى الجزء الحقيقي نكتب $\text{Re}(z) = a$ ، و العدد b يسمى الجزء التخيلي نكتب $\text{Im}(z) = b$

خاصية $(\mathbb{C}; +; \times)$ جسم تبادلي

1- التمثيل الهندسي لعدد عقدي

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.

كل نقطة $M(a; b) \in (P)$ هي صورة عدد عقدي وحيد $z = a + ib$ وهذا الأخير يسمى لحق M ونكتب $M(z)$

$$\text{أو } z = \text{aff}(M)$$

العدد العقدي $z = a + ib$ حيث $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ يسمى أيضا لحق المتجهة $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ نكتب $z = \text{aff}(\vec{u})$

$$* \text{ لحق } \overrightarrow{AB} \text{ هو } z_B - z_A \text{ حيث } A(z_A) \text{ و } B(z_B)$$

$$* \text{ تكون النقط المختلفة } A(z_A) \text{ و } B(z_B) \text{ و } C(z_C) \text{ مستقيمة إذا و فقط إذا كان } \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$$

* التطبيق $M(z) \rightarrow M'(z+a)$ من المستوى (P) نحو المستوى (P) هو الازاحة التي متجهتها

$$\vec{u} \text{ حيث } \text{aff}(\vec{u}) = a$$

2- المرافق، و المعيار

ليكن عدد عقدي $z = a + ib$ حيث $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

* العدد العقدي $z = a - ib$ يسمى مرافق العدد العقدي $z = a + ib$ ونرمز له بـ $\bar{z} = a - ib$.

* العدد الحقيقي $\sqrt{z\bar{z}}$ يسمى معيار العدد العقدي $z = a + ib$. نرمز له بـ $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

لتكن $(z; z') \in \mathbb{C}^2$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{Z}^*$

$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \quad ; \quad z - \bar{z} = 2\operatorname{Im}(z)i \quad *$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} \quad z' \neq 0 \quad \overline{\alpha z} = \alpha \bar{z} \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n \quad \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'} \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad *$$

$$m \in \mathbb{N}^* \quad \left| \sum_{i=1}^{i=m} z_i \right| \leq \sum_{i=1}^{i=m} |z_i| \quad *$$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z \quad *$$

$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z \quad *$$

$$z' \neq 0 \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad |z^n| = |z|^n \quad |z \cdot z'| = |z| |z'| \quad *$$

$$\|\overline{AB}\| = AB = |z_B - z_A| \quad *$$

3- الشكل المثلثي لعدد عقدي والعمدة

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$

ليكن $z = a + ib$ حيث $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ عددا عقديا غير منعدم و النقطة M صورته , وليكن α قياسا

للزاوية $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$.

العدد α يسمى عمدة للعدد العقدي z و نكتب $[2\pi]$ $\arg z \equiv \alpha$.

*- ليكن $z = a + ib$ حيث $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ عددا عقديا غير منعدم و r عددا حقيقيا موجبا قطعاً و α

عددا حقيقيا نضع $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$

ومنه $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ حيث $\cos\alpha = \frac{a}{r}$; $\sin\alpha = \frac{b}{r}$ إذن $[2\pi]$ $\arg z \equiv \alpha$

الكتابة $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ تسمى الشكل المثلثي للعدد العقدي z و نكتب $z = [r, \alpha]$

خاصات

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

$$z = [r, \alpha] \text{ و } z' = [r', \alpha'] \text{ فان } zz' = [rr', \alpha + \alpha'] \text{ و } \frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'}, \alpha - \alpha' \right]$$

$$\bar{z} = [r, -\alpha] \text{ و } -z = [r, \alpha + \pi]$$

$$z^n = [r^n, n\alpha] \text{ و } \frac{1}{z} = \left[\frac{1}{r}, -\alpha \right]$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^* \quad (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha \quad \text{صيغة موافر}$$

$$\arg(z_B - z_A) = \overrightarrow{(\vec{e}_1; \overrightarrow{AB})} \quad \text{فان } [2\pi] \quad \text{و } D(z_D) \neq C(z_C) \text{ و } A(z_A) \neq B(z_B) \text{ إذا كان}$$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \overrightarrow{(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})} \quad [2\pi] \quad \text{و}$$

4- الكتابة الاسية

$$z = [r, \alpha] = re^{i\alpha} \quad \cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \quad \sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

5- الجذور النونية لعدد عقدي غير منعدم

الجذور النونية $a = [r, \alpha]$ (جذور المعادلة $z^n = a$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$) هي

$$k \in \{0; 1; 2; \dots, n-1\} \quad z_k = \left[\sqrt[n]{r}; \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right]$$

الجذور النونية للوحدة أي الجذور النونية لـ 1 هي $k \in \{0; 1; 2; \dots, n-1\} \quad z_k = \left[1; \frac{2k\pi}{n} \right]$

6- المعادلات من الدرجة الثانية

لتكن a و b و c أعدادا عقدية بحيث a غير منعدم .

$$\text{المعادلة } az^2 + bz + c = 0 \text{ تقبل حلين في } \mathbb{C} \text{ هما } z_1 = \frac{-b+d}{2a} \text{ ; } z_2 = \frac{-b-d}{2a} \text{ حيث } d \text{ جذر}$$

$$\text{مربع للمميز } b^2 - 4ac .$$

7- تطبيقات هندسية

خاصية

ليكن z_A و z_B عددين غير منعدمين صورتهم على التوالي A و B .

$$\text{النقطة } M(z_A \times z_B) \text{ تحقق المثلث } OMB \text{ منشابه مباشرة مع المثلث } OAI \text{ حيث } \frac{OM}{OA} = \frac{BM}{IA} = OB$$

خاصية

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

كل دوران مركزه Ω ذات اللحق ω و قياس زاويته θ هو التطبيق في المستوى العقدي الذي يربط كل نقطة

$$M(z) \text{ بنقطة } M'(z') \text{ حيث } z' = ze^{i\theta} + \omega(1 - e^{i\theta})$$

خاصية

ليكن a و b عددين عقدين بحيث $|a| = 1$; $a \neq 1$

التطبيق F في المستوى الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بنقطة $M'(z')$ حيث $z' = az + b$ هو الدوران الذي مركزه

$$\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right) \text{ و زاويته } \arg(a)$$