

الأعداد العقدية

مبرهنة

توجد مجموعة \mathbb{C} تتضمن \mathbb{R} وتحقق:

(i) يحتوي \mathbb{C} على عنصر غير حقيقي i و يتحقق $i^2 = -1$

(ii) كل عنصر من \mathbb{C} يكتب بكيفية وحيدة على الشكل: $a + ib$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$

(iii) المجموعة \mathbb{C} مزودة بعمليتي الجمع والضرب تمددان نفس العمليتين في \mathbb{R} و لهما نفس

الخصائص

ل يكن $(a'; b') \in \mathbb{R}^2$ و $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ و $a = a' \Leftrightarrow a + ib = a' + ib'$

ليكن عدد عقدي $z = a + ib$ حيث $a = \operatorname{Re}(z)$ و $b = \operatorname{Im}(z)$ العدد a يسمى الجزء الحقيقي نكتب $\operatorname{Re}(z) = a$ ، و العدد b يسمى الجزء التخييلي نكتب $\operatorname{Im}(z) = b$

خاصية جسم تبادلي $(\mathbb{C}; +, \times)$

1- التمثيل الهندسي لعدد عقدي

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعمد ممنظم مباشر $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

كل نقطة $M(z)$ هي صورة عدد عقدي وحيد $z = a + ib$ وهذا الأخير يسمى لحق $M(z)$ ونكتب

أو $z = \operatorname{aff}(M)$

العدد العقدي $z = a + ib$ حيث $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ يسمى أيضا لحق المتجهة $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ نكتب

* لحق \vec{AB} هو $B(z_B) - z_A$ حيث $z_B - z_A$ و $A(z_A)$

* تكون النقط المختلفة $(z_A, z_B, z_C) \in \mathbb{R}$ و $(A(z_A), B(z_B), C(z_C))$ مستقيمية إذا و فقط إذا كان

* التطبيق $M(z) \rightarrow M'(z + a)$ هو الازاحة التي متوجهتها

$\operatorname{aff}(\vec{u}) = a$ حيث \vec{u}

2- المراقة والمعار

ليكن عدد عقدي $z = a + ib$ حيث $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

العدد العقدي $z = a - ib$ يسمى مرافق العدد العقدي $z = a + ib$ ونرمز له بـ $\bar{z} = a - ib$ *

العدد الحقيقي $\sqrt{z\bar{z}}$ يسمى معيار العدد العقدي $z = a + ib$. نرمز له بـ $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ *

لتكن $n \in \mathbb{Z}^*$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ و $(z; z') \in \mathbb{C}^2$

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z) ; z - \bar{z} = 2 \operatorname{Im}(z)i *$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \quad z' \neq 0 \quad \overline{\alpha z} = \alpha \bar{z} \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n \quad \overline{z \bar{z}'} = \overline{z} \overline{z'} \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' *$$

$$m \in \mathbb{N}^* \quad \left| \sum_{i=1}^{i=m} z_i \right| \leq \sum_{i=1}^{i=m} |z_i| *$$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z *$$

$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z *$$

$$z' \neq 0 \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad |z^n| = |z|^n \quad |z \cdot z'| = |z| |z'| *$$

$$\|\vec{AB}\| = AB = |z_B - z_A| *$$

3- الشكل المثلثي لعدد عقدي والعمدة

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعمد ممنظم مباشر $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

ليكن $z = a + ib$ حيث $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ عددا عقديا غير منعدم و النقطة M صورته ، ولتكن α قياسا

للزاوية $\widehat{(\vec{e}_1, \vec{OM})}$

العدد α يسمى عمدة للعدد العقدي z و نكتب $[\alpha]$

ليكن $z = a + ib$ حيث $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ عددا عقديا غير منعدم و r عددا حقيقيا موجبا قطعا و *

عدد حقيقيا نضع $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\arg z \equiv \alpha$ [2π] إذن $\cos \alpha = \frac{a}{r}$; $\sin \alpha = \frac{b}{r}$ حيث $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ ومنه

الكتابة $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ تسمى الشكل المثلثي للعدد العقدي z و نكتب $[r, \alpha]$

خاصيات

$$\frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'}, \alpha - \alpha' \right] \text{ و } zz' = [rr', \alpha + \alpha'] \quad \text{فإن } z' = [r', \alpha'] \text{ و } z = [r, \alpha] \quad *$$

$$-z = [r, \alpha + \pi] \quad \text{و} \quad \bar{z} = [r, -\alpha] \quad +$$

$$\frac{1}{z} = \left[\frac{1}{r}; -\alpha \right] \quad z^n = [r^n; n\alpha] \quad +$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^* \quad (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha \quad \text{صيغة موافر}$$

$$\arg(z_B - z_A) = \overline{(\vec{e}_1; \overrightarrow{AB})} \quad [2\pi] \quad \text{فإن } D(z_D) \neq C(z_C) \text{ و } A(z_A) \neq B(z_B) \quad \text{إذا كان}$$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \overline{(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})} \quad [2\pi] \quad *$$

4- الكتابة الاسية

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \quad \sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \quad z = [r, \alpha] = r e^{i\alpha}$$

5- الجذور النونية لعدد عقدي غير منعدم

$$\text{الجذور النونية } z^n = a \quad (\text{جذور المعادلة } a = [r, \alpha] \text{ حيث } n \in \mathbb{N}^*) \quad k \in \{0; 1; 2; \dots, n-1\} \quad z_k = \left[\sqrt[n]{r}; \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right]$$

$$k \in \{0; 1; 2; \dots, n-1\} \quad z_k = \left[1; \frac{2k\pi}{n} \right] \quad \text{الجذور النونية للوحدة أي الجذور النونية لـ 1 هي}$$

6- المعادلات من الدرجة الثانية

لتكن a و b و c أعدادا عقدية بحيث a غير منعدم.

$$\text{المعادلة } az^2 + bz + c = 0 \quad \text{تقبل حلين في } \mathbb{C} \quad \text{هما } z_1 = \frac{-b - d}{2a} \quad ; \quad z_2 = \frac{-b + d}{2a} \quad \text{حيث } d \text{ جذر}$$

$$\text{مربع للمميز } b^2 - 4ac$$

7- تطبيقات هندسية

خاصية

ليكن z_A و z_B عددين غير منعدمين صورتهما على التوالي A و B .

$$\frac{OM}{OA} = \frac{BM}{IA} = OB \quad \text{تحقق المثلث } OMB \text{ متشابه مباشرة مع المثلث } OAI \quad \text{حيث } M(z_A \times z_B) \text{ النقطة}$$

خاصية

كل دوران مركزه Ω ذات اللحق ω و قياس زاويته θ هو التطبيق في المستوى العقدي الذي يربط كل نقطة

$$z' = ze^{i\theta} + \omega(1 - e^{i\theta}) \quad \text{حيث} \quad M'(z') \quad \text{بنقطة} \quad M(z)$$

خاصية

ليكن a و b عددين عقدبن بحيث $|a| = 1$; $a \neq 1$

التطبيق F في المستوى الذي يربط كل نقطة $M'(z') = az + b$ حيث $z' = M(z)$ هو الدوران الذي مركزه

$$\arg(a) \quad \text{و زاويته} \quad \Omega \left(\frac{b}{1-a} \right)$$