## I. تقديم المجموعة $\mathbb{C}$ :

### 01. نشاط: لنعتبر المعادلة: $x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0$

1) هذه المعادلة: ليس لها حل في $\mathbb{R}$ .وهذا يفرض علينا أن نستعمل العدد $i$ وهو عدد تخيلي حيث $i^2 = (-i)^2 = -1$ ومنه نحصل على أن $i$ و $-i$ حلين للمعادلة

2) لنعتبر المعادلة: $(E): x^2 - 2x + 2 = 0$

باستعمال نفس خاصيات عمليتي الجمع و الضرب في $\mathbb{R}$ و العدد التخيلي $i$ حيث $i^2 = (-i)^2 = -1$ .

تحقق أن: المعادلة $(E)$ تكتب على الشكل الآتي $(E): (x-1)^2 + 1 = 0$

تحقق بأن: $1+i$ و $1-i$ حلي للمعادلة $(E)$

### 02. مفردات:

- العدد $i$ هو عدد تخيلي.
- العددان $1+i$ و $1-i$ نسميهما عددين عقديين و بصفة عامة
- نكتب عدد عقدي على الشكل $z = a + bi$ مع $a \in \mathbb{R}$ و $b \in \mathbb{R}$.

### 03. تعريف:

- عدد عقدي هو عدد يكتب على الشكل $z = a + bi$ حيث a و b من $\mathbb{R}$ و $i$ يسمى عدد تخيلي يحقق $i^2 = -1$.
- الأعداد العقدية تكون مجموعة تسمى مجموعة الأعداد العقدية ونرمز لها ب: $\mathbb{C}$.
- المجموعة $\mathbb{C}$ مزودة بعمليتي الجمع و الضرب تمددان نفس العمليتين في $\mathbb{R}$ ولهما نفس الخاصيات.( التبادلية ؛ التجمعية .....)

### 04. مفردات :

- $a+bi$ يسمى عدد عقدي و نرمز له في الغالب ب : $z$
- المجموعة $\mathbb{C}$ تسمى مجموعة الأعداد العقدية.
- الكتابة : $a+bi$ تسمى الكتابة الجبرية للعدد العقدي $z$
  او أيضا الشكل الجبري للعدد العقدي $z$
- العدد الحقيقي $a$ يسمى الجزء الحقيقي ل $z$ : ونكتب: $\mathrm{Re}(z) = a$ مثال: $\mathrm{Re}(2-3i) = 2$
- العدد الحقيقي $b$ يسمى الجزء التخيلي ل $z$ : ونكتب: $\mathrm{Im}(z) = b$ مثال: $\mathrm{Im}(2-3i) = -3$
- العدد العقدي $z' = a - bi$ يسمى مرافق العدد العقدي $z$ ويرمز له ب : $z' = \overline{z} = a - bi$
  مثال: $z = 2-3i$ مرافقه هو $\overline{z} = \overline{2-3i} = 2+3i$
- $a+bi = a'+b'i \Leftrightarrow a = a'$ و $b = b'$ .

## II. العمليات على الأعداد العقدية :

ليكن : $z = x + yi$ و $z' = x' + y'i$ من $\mathbb{C}$

| العملية : الجمع في $\mathbb{C}$ | مثال |
|---|---|
| $z+z' = x+yi+x'+y'i = (x+x')+(y+y')i$ | $z+z' = 1+5i+2-3i = 3+2i$ |
| **العملية : الضرب في $\mathbb{C}$** | **مثال** |
| $z \times z' = (x+yi)\times(x'+y'i) = (xx'-yy')+(xy'+yx')i$ | $z \times z' = (1+5i)\times(2-3i)$ $= 1\times 2 + 5i\times(-3i) + (1\times(-3)+5\times 2)i = 17+7i$ |

| العملية : الضرب في $\mathbb{C}$ (حالة خاصة) | مثال |
|---|---|
| 1) $k.z=k.(x+yi)=kx+kyi$<br>2) $z\times\overline{z}=x^2+y^2$ | 1) $-3\times z=-3\times(1+5i)=-3-15i$<br>2) $(2+3i)\times\overline{(2+3i)}=2^2+3^2=13$ |
| العملية : المقلوب في $\mathbb{C}$ (نستعمل مرافق $z'$) | مثال |
| $\frac{1}{z'}=\frac{1}{x'+y'i}=\frac{1\times\overline{z'}}{z'\overline{z'}}=$<br>$=\frac{1\times(x'-y'i)}{(x'+y'i)(x'-y'i)}=\frac{x'}{x'^2+y'^2}-\frac{y'}{x'^2+y'^2}i$ | $\frac{1}{z'}=\frac{1}{2-3i}=\frac{2+3i}{(2-3i)\times(2+3i)}$<br>$=\frac{2}{2^2+3^2}+\frac{3}{2^2+3^2}i=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$ |
| العملية : الخارج في $\mathbb{C}$ (نستعمل مرافق $z'$) | مثال |
| $\frac{z}{z'}=\frac{x+yi}{x'+y'i}=\frac{z\times\overline{z'}}{z'\times\overline{z'}}=\frac{1}{z'\times\overline{z'}}\times z\times\overline{z'}$<br>$=\frac{1}{x'^2+y'^2}\times(x+yi)(x'-y'i)$<br>$=\frac{xx'+yy'}{x'^2+y'^2}+\frac{yx'-xy'}{x'^2+y'^2}i$ | $\frac{z}{z'}=\frac{1+5i}{2-3i}=\frac{(1+5i)(2+3i)}{(2-3i)\times(2+3i)}$<br>$=\frac{1\times2+5i\times3i}{2^2+3^2}+\frac{5i\times2+1\times3i}{2^2+3^2}$<br>$=\frac{-13}{13}+\frac{13}{13}i=-1+i$ |

❖ أمثلة: أحسب ما يلي:

- $z_1=2+5i-(-4+2i)=2+4+(5-2)=6+3i$
- $z_2=2+5i-3i(-4+2i)=2+5i+12i+6=8+17i$
- $z_3=(2+5i)(-4+2i)$
  $=2\times(-4)+5i\times2i+(2\times2+5\times(-4))i=-18-16i$
- $z_4=\frac{1}{1+3i}=\frac{1\times(1-3i)}{(1+3i)\times(1-3i)}=\frac{1-3i}{1^2+3^2}=\frac{1}{10}-\frac{3}{10}i$
- $z_4=\frac{2+3i}{5-i}=\frac{(2+3i)\times(5+i)}{(5-i)\times(5+i)}$
  $=\frac{10-3+(2+15)i}{5^2+1^2}=\frac{7+17i}{26}=\frac{7}{26}+\frac{17}{26}i$

❖ ملحوظة:

- $(a+bi)^2=a^2+2abi+(bi)^2=a^2+2abi-b^2$
- $(a-bi)^2=a^2-2abi+(-bi)^2=a^2-2abi-b^2$
- $(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$

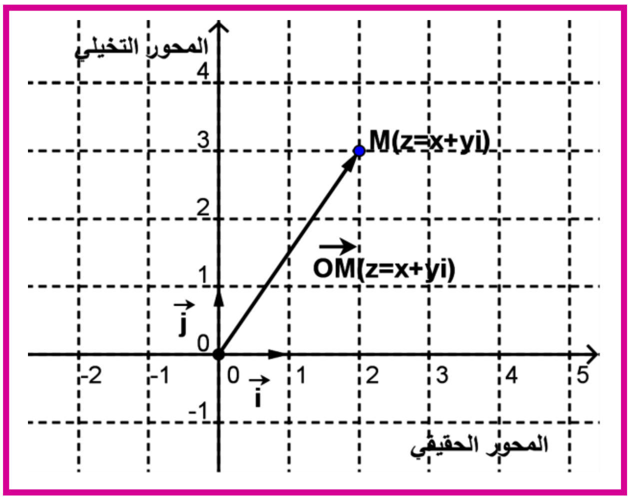
## III. التمثيل الهندسي لعدد عقدي :

### 01. نشاط:

المستوى $(P)$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(0,\vec{i},\vec{j})$ لنعتبر التطبيق الآتي:

$$f:\quad \mathbb{C}\rightarrow(P)$$

$$z=x+yi\rightarrow f(z)=f(x+yi)=M(x,y)$$ (أي $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$)




1) أنشئ النقط التالية $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$ صورة الأعداد التالية :

$z_1 = 3$ و $z_2 = 3i$ و $z_3 = -2-3i$ و $z_4 = 2+i$ و $z_5 = 2-i$

## 02. مفردات:

- المستوى $(P)$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(0,\vec{i},\vec{j})$ يسمى المستوى العقدي.
- النقطة $M(x,y)$ هي صورة العدد العقدي $z = x+yi$.

  نكتب: $M_{(z)}$ أو $M_{(x+yi)}$ نقرأ : النقطة $M$ التي لحقها $z$.

  نكتب كذلك : $z_M$ ونقرأ $z$ لحق النقطة $M$.
- المتجهة $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$ تسمى صورة العدد العقدي $z$ .

  نكتب : $\overrightarrow{OM}_{(z)}$ أو $\overrightarrow{OM}_{(x+yi)}$ نقرأ المتجهة $\overrightarrow{OM}$ التي لحقها $z$.

  نكتب كذلك : $z_{\overrightarrow{OM}}$ نقرأ $z$ لحق النقطة $\overrightarrow{OM}$.
- كل عدد عقدي حقيقي صرف $z$ أي $(z=x)$ صورته النقطة $M(x,0)$ تنتمي لمحور الأفاصيل $(0,\vec{i})$ ولهذا $(0,\vec{i})$ يسمى المحور الحقيقي.
- كل عدد عقدي تخيلي صرف $z$ أي $(z=yi)$ صورته النقطة $M(0,y)$ تنتمي لمحور الأراتيب $(0,\vec{j})$ ولهذا $(0,\vec{j})$ يسمى المحور التخيلي.

## 03. نتائج:

$A(z_A); B(z_B); C(z_C)$ و $I(z_I)$. أربع نقط من المستوى العقدي ألحاقها على التوالي: $z_A = x_A + y_A i$ و $z_B = x_B + y_B i$ و $z_C = x_C + y_C i$ و $z_I = x_I + y_I i$ .

- المتجهة $\overrightarrow{AB}$ لحقها هو: $z_B - z_A$.
- المتجهة $k.\overrightarrow{AB}$ لحقها هو : $k \times (z_B - z_A)$
- I منتصف القطعة: $[A,B]$ لحق I هو: $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.
- A و B و C نقط مختلفة مثنى مثنى هي مستقيمية $(\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB})$ يكافئ $z_C - z_A = k(z_B - z_A)$ و $k \in \mathbb{R}$ . أو أيضا :

  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = k \in \mathbb{R}$ .

❖ نبرهن على أن : العدد العقدي $z_B - z_A$ هو لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$

A و B نقطتان من المستوى العقدي لحقاهما على التوالي $z_A = x_A + y_A i$ و $z_B = x_B + y_B i$ .

- $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ زوج إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}$
- توجد نقطة وحيدة M من المستوى العقدي $(P)$ حيث: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$. إذن: $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ هو زوج إحداثيتا النقطة M ومنه : لحق النقطة M أو كذلك المتجهة $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$ هو العدد العقدي:

$$z_{\overrightarrow{AB}} = (x_B - x_A) + (y_B - y_A)i$$
$$= (x_B + y_B i) - (x_A + y_A i) = z_B - z_A$$

خلاصة: العدد العقدي $z_B - z_A$ هو لحق المتجهة: $\overrightarrow{AB}$ .

## 04. مثال:

نعتبر $I(z_I)$ ; $A(z_A = 2+i)$ ; $B(z_B = -2+i)$ ; $C(z_C = 5+xi)$ و $I(z_I)$ أربع نقط من المستوى العقدي المنسوب إلى م.م.م $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

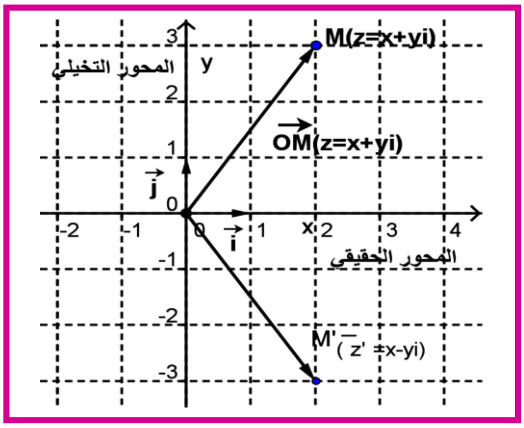
1) أوجد $z_{\overrightarrow{AB}}$ لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$.
2) أوجد $z_I$ لحق I منتصف القطعة $[AB]$ .
3) حدد x حيث النقط A و B و C مستقيمية.

# IV. مرافق عدد عقدي :

## 01. تعريف:

ليكن $z = x + yi$ من $\mathbb{C}$ مع x و y من $\mathbb{R}$.

العدد الحقيقي $x - yi$ يسمى مرافق العدد العقدي z و نرمز له ب: $\bar{z} = \overline{x+yi} = x - yi$ .




## 02. أمثلة:

$z = 1+5i$ لدينا: $\bar{z} = \overline{1+5i} = 1-5i$

$z = -1-3i$ لدينا: $\bar{z} = \overline{-1-3i} = -1+3i$

$z = 1$ لدينا: $\bar{z} = \bar{1} = 1$

$z = 2i$ لدينا: $\bar{z} = \overline{2i} = -2i$

$z = -6i$ لدينا: $\bar{z} = \overline{-6i} = 6i$

## 03. خاصيات المرافق:

$z = x + yi$ و $z' = x' + y'i$ من $\mathbb{C}$

- $\bar{\bar{z}} = z$ و $z + \bar{z} = 2x$ و $z - \bar{z} = 2yi$ .
- $z \times \bar{z} = x^2 + y^2$ .
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ و $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$ .
- $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z'}}$ ; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ ; $(z' \neq 0)$ و $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ .

**04.** أمثلة:

- $\overline{\overline{2+3i}}=2+3i$ .
- $\overline{(2+3i)+1-2i}=\overline{2+3i}+\overline{1-2i}=2-3i+1+2i=3-i$ .
- $\overline{(2+3i)\times(1-5i)}=\overline{2+3i}\times\overline{1-5i}=(2-3i)(1+5i)$ .
- $\overline{\left(\frac{1}{1-5i}\right)}=\frac{1}{\overline{1-5i}}=\frac{1}{1+5i}$ و $\overline{\left(\frac{2+3i}{1-5i}\right)}=\frac{\overline{2+3i}}{\overline{1-5i}}=\frac{2-3i}{1+5i}$
- $\overline{(2+3i)^n}=(2-3i)^n$

**05.** ملحوظة:

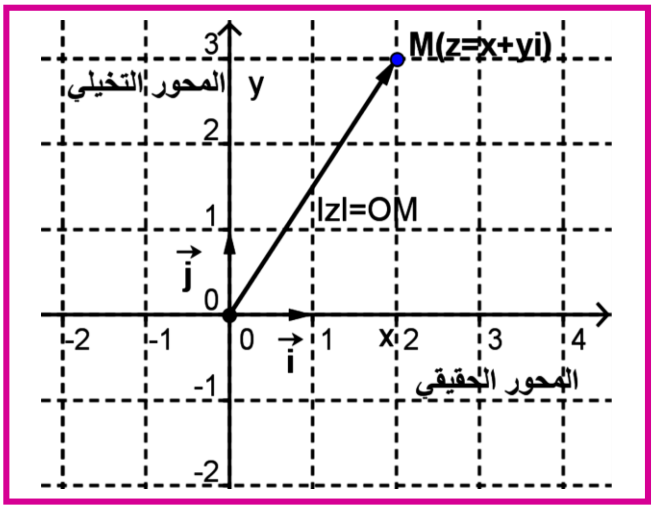
- $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \overline{z}=z$ ؛ ( أي $z$ عددا حقيقيا صرفا ) .
- $z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow \overline{z}=-z$ ؛ ( أي $z$ عددا تخيليا صرفا ) .

## V. معيار عدد عقدي :

**01.** نشاط:

لتكن $M_{(z=x+yi)}$ نقطة من المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(0,\vec{i},\vec{j})$

1) أوجد: $z\times\overline{z}$
2) أكتب المتجهة $\overrightarrow{OM}$ في المعلم $(0,\vec{i},\vec{j})$
3) أوجد $\|\overrightarrow{OM}\|$ . ماذا تستنتج ؟




**02.** تعريف :

$z=x+yi$ من $\mathbb{C}$ مع $x$ و $y$ من $\mathbb{R}$.
العدد الحقيقي الموجب $\sqrt{z\overline{z}}$ يسمى معيار العدد العقدي $z=x+yi$ . نكتب : $|z|=\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{x^2+y^2}$.

**03.** التأويل الهندسي للمعيار :

إذا كان $z=x+yi$ لحق $M$ فإن : $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\|\overrightarrow{OM}\|$

**04.** أمثلة:

- $|5|=|5+0i|=\sqrt{5^2+0^2}=5$.
- $|-7|=|-7+0i|=\sqrt{(-7)^2+0^2}=7$.
- $|2i|=|0+2i|=\sqrt{0^2+2^2}=2$.
- $|-2i|=|0-2i|=\sqrt{0^2+(-2)^2}=2$
- $|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.
- $|1+i\sqrt{3}|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{4}=2$.

## 03.خاصيات المعيار:

$z = x + yi$ و $z' = x' + y'i$ من $\mathbb{C}$

- $|\overline{z}| = |-z| = |z|$ و $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ و $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ ; $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$ ; $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ ; $(z' \neq 0)$
- $|z^n| = |z|^n$ مع $n \in \mathbb{Z}$ و $z \neq 0$

## 04.أمثلة:

- $|\overline{1+i}| = |-1-i| = |1+i| = \sqrt{2}$
- $|(1-i)\times(2+3i)| = |1-i| \times |2+3i| = \sqrt{2} \times \sqrt{13} = \sqrt{26}$
- $\left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{|1+i|}{|2|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $|-i+i| \leq |-i| + |i| \Leftrightarrow 0 \leq 1+1$
- $|(1+i)^6| = |1+i|^6 = (\sqrt{2})^6 = 8$

## 05.تمرين:

أحسب معيار الأعداد العقدية: $z_1 = -5+3i$ و $z_2 = 4i(-2+3i)$ و $z_3 = 1+i\sqrt{3}$ و $z_4 = 5+i5\sqrt{3}$ و $z_5 = \frac{7}{1-i\sqrt{3}}$ و

$z_6 = \frac{4(1+i)}{2i(-5-i5\sqrt{3})}$ و $z_7 = \frac{4(1+i)^2}{2i(-5-i5\sqrt{3})^6}$

## 06.نتائج هندسية:

A و B و C ثلاث نقط من المستوى العقدي ألحاقها $z_A = x_A + y_A i$ و $z_B = x_B + y_B i$ و $z_C = x_C + y_C i$ على التوالي مع $z_A \neq z_C$ . لدينا :

- $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = |z_B - z_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \frac{AB}{AC}$

## 07.مثال:

$A(z_A = 1+i)$ ; $B(z_A = -1+i)$ ; $C(z_C = 3i)$ ثلاث نقط من المستوى العقدي.

1) نحسب أطوال أضلاع المثلث ABC .

لدينا:

- $AB = |z_B - z_A| = |-1+i-(1+i)| = |-2| = 2$ .

- $AC=|z_C-z_A|=|3i-(1+i)|=|-1+2i|=\sqrt{5}$ .
- $CB=|z_B-z_C|=|-1+i-(3i)|=|-1-2i|=\sqrt{5}$

**2)** ماهي طبيعة المثلث $ABC$ .

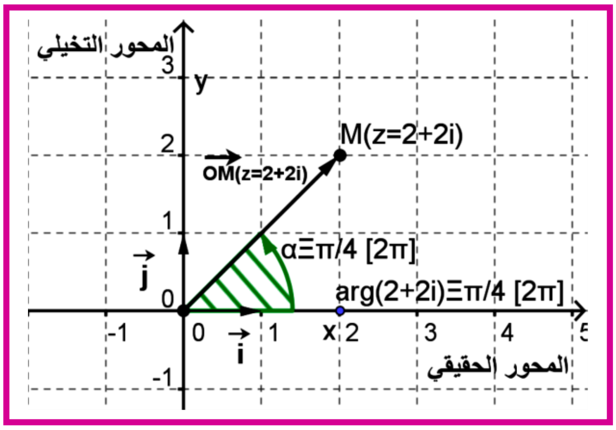
بمأن: $AC=CB$ المثلث $ABC$ متساوي الساقين في $C$ .

## VI. عمدة لعدد عقدي غير منعدم:

### 01. نشاط:

لنأخذ عدد عقدي $z$ غير منعدم ؛ $M$ صورته في المستوى العقدي إذن: $M\neq O$

مثال: $z=2+2i$ من $\mathbb{C}^*$ .




### 02. تذكير:

- لنأخذ الزاوية الموجهة: $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$

- قياسات هذه الزاوية الموجهة هي: $\overline{(\vec{i},\overrightarrow{OM})}\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

أو أيضا: $\overline{(\vec{i},\overrightarrow{OM})}=\frac{\pi}{4}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

### 03. مفردات :

- $\frac{\pi}{4}$ قياس لزاوية الموجهة $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ يسمى عمدة العدد العقدي $z=2+2i$
- كذلك كل قياس من بين القياسات $\alpha+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ للزاوية الموجهة $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ يسمى عمدة العدد العقدي $z=2+2i$ .
- نرمز للعمدة للعدد العقدي الغير المنعدم $z=2+2i$ ب: $\arg(z)\equiv\overline{(\vec{i},\overrightarrow{OM})}\ [2\pi]$ أو $\arg(2+2i)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$
- كل عدد من بين الأعداد التي هي على شكل $\frac{\pi}{4}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ هو كذلك عمدة العدد العقدي $z=x+yi$
- بصفة عامة نكتب : $\arg(z)\equiv\alpha[2\pi]$ أو $\arg(z)=\alpha+2k\pi;k\in\mathbb{Z}$
- ونفضل أخذ $\alpha\in]-\pi,\pi]$ ( أي القياس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ ) كعمدة للعدد العقدي الغير المنعدم $z$.
- العدد العقدي $z=0$ ليس له عمدة (لإن $M=O$ ضلع غير محدد )

### 04. تعريف:

لنأخذ عدد عقدي $z$ غير منعدم و $M$ صورته في المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(0,\vec{i},\vec{j})$ إذن: $M\neq O$ .

- كل قياس $\alpha$ للزاوية الموجهة $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ يسمى عمدة العدد العقدي $z$ و يرمز له ب: $\arg(z)$

نكتب: $\arg(z)\equiv\alpha\ [2\pi]$ أو $\arg(z)=\alpha+2k\pi;k\in\mathbb{Z}$.

### 05. أمثلة:

**1-** أنشئ في المستوى العقدي المنسوب إلى م.م.م $(0,\vec{i},\vec{j})$ النقط التالية: $M_{1(z_1=2)}$ و $M_{2(z_2=-3)}$ و $M_{3(z_3=2i)}$ و $M_{4(z_4=-3i)}$ و $M_{5(z_5=1+i)}$ و $M_{6(z_6=1-i)}$ و $M_{7(z_7=2+2i)}$ و $M_{8(z_8=-1-i)}$

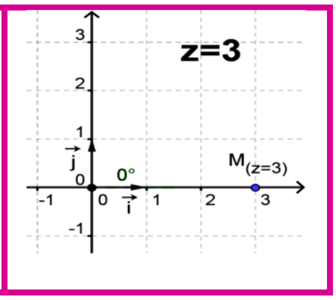
**2-** استنتج عمدة لحق النقط السابقة.

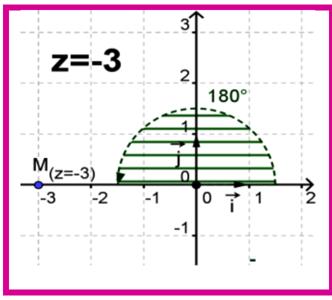
## 06. ملحوظة:

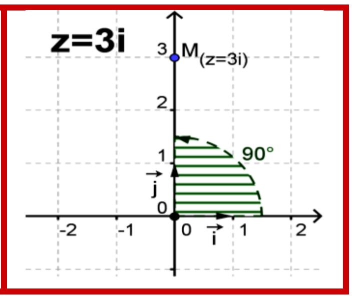
a و b من $\mathbb{R}$ . $z\neq 0$ ( أي $(a,b)\neq(0,0)$ ) حيث: $z=a+bi$ و $-z=-a-bi$ و $\bar{z}=a-bi$

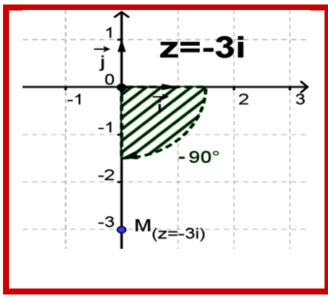
- $z=a>0$ لدينا : $\arg(a)\equiv 0[2\pi]$ . مثال : $\arg(3)\equiv 0[2\pi]$.
- $z=a<0$ لدينا : $\arg(a)\equiv \pi[2\pi]$. مثال : $\arg(-3)\equiv \pi[2\pi]$.
- $z=bi;b>0$ لدينا : $\arg(bi)\equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. مثال : $\arg(-3i)\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.
- $z\neq 0$ لدينا : $\arg(-z)\equiv \pi+\arg(z)[2\pi]$. مثال: $\arg(2+2i)\equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ و $\arg(-2-2i)\equiv \pi+\frac{\pi}{4}[2\pi]$.
- $z\neq 0$ لدينا : $\arg(\bar{z})\equiv -\arg(z)[2\pi]$. مثال : $\arg(2+2i)\equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ و $\arg(\overline{2-2i})\equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

أمثلة مبيانيا:




## 07. خاصيات العمدة:

خاصية

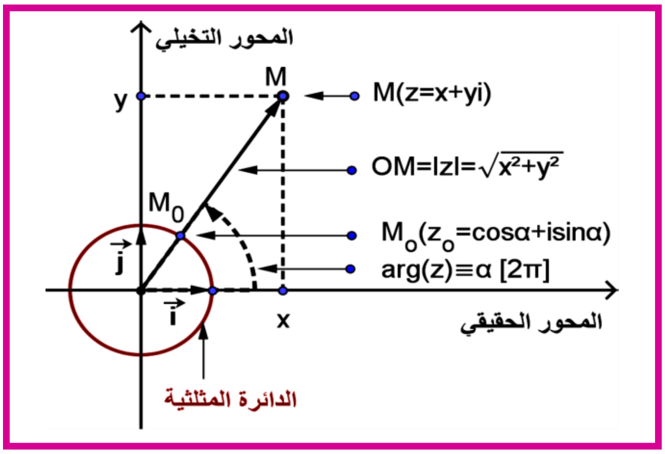
ليكن z و z' من $\mathbb{C}^*$ لدينا :

- $\arg(z\times z')\equiv \arg z+\arg z' \ [2\pi]$
- $p\in\mathbb{Z};\arg(z^n)\equiv n\times\arg z \ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z'}\right)\equiv -\arg z' \ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)\equiv \arg z-\arg z' \ [2\pi]$
- إذا كان $k>0$ فإن : $\arg(kz)\equiv \arg(z) \ [2\pi]$.
- إذا كان $k<0$ فإن : $\arg(kz)\equiv \pi+\arg(z) \ [2\pi]$.

## 08. مثال:

أوجد عمدة : $z_1=1+i$ و $z_2=4i(1+i)$ و $z_3=(1-i)$ و $z_4=(1-i)(1+i)^8$ و $z_5=1-i\sqrt{3}$ و $z_6=\frac{(1+i)}{(1-i\sqrt{3})}$ .

## VII. شكل مثلثي لعدد عقدي غير منعدم:




### 01. نشاط:

المستوى العقدي $(P)$ منسوب إلى معلم. م. م. م. $(0,\vec{i},\vec{j})$

- لنأخذ عدد عقدي $z=x+yi$ غير منعدم و $M$ صورته في المستوى العقدي $(P)$ إذن: $M\neq O$ مع:

$$\arg(z)\equiv\overline{(\vec{i},\overrightarrow{OM})}\equiv\alpha\ [2\pi]$$

- الدائرة المثلثية $(\mathcal{C})$ المرتبطة بالمعلم $(0,\vec{i},\vec{j})$ تقطع نصف المستقيم $[O,M)$ في $M_0$ ولحقها هو $z_0=\cos\alpha+i\sin\alpha$.
- لدينا : $O$ $M$ و $M_0$ مستقيمية و $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OM_0}$ لهما نفس الاتجاه و منه: $\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OM_0}$ مع $k>0$ ( لأن $M\neq O$ )

* لحق $\overrightarrow{OM}$ هو $z=x+yi$ . لحق $\overrightarrow{OM_0}$ هو $z_0=\cos\alpha+i\sin\alpha$.

- لدينا : $O$ و $M$ و $M_0$ مستقيمية و منه: $\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OM_0}$ . إذن: $z=kz_0\Leftrightarrow x+yi=k(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ .

نحصل على : $(1):x+yi=k(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

نحدد $k$: $z=kz_0$ إذن $|z|=|kz_0|\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}=|k||z_0|\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}=|k|=k$ .

نحصل على: $(2):k=\sqrt{x^2+y^2}$

- حسب العلاقة $(1)$ و $(2)$ نحصل على العلاقة التالية: $z=x+yi=\sqrt{x^2+y^2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)=|z|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

### 02. مفردات:

1) الكتابة : $(3):z=|z|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ تسمى الشكل المثلثي للعدد العقدي الغير المنعدم $z=x+yi$.

2) الكتابة $(3)$: نكتبها كذلك على الشكل الآتي : $(3):z=|z|(\cos\alpha+i\sin\alpha)=[\ |z|,\arg(z)]=[r,\alpha]$ .

### 03. تعريف وخاصية:

ليكن عدد عقدي $z=x+yi$ من $\mathbb{C}^*$ و $\arg(z)\equiv\alpha\ [2\pi]$ و $r=|z|$

- العدد العقدي $z$ يكتب على شكل : $z=|z|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ أو $z=\sqrt{x^2+y^2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ أو $z=[\ |z|\ ,\arg(z)]=[r,\alpha]$
- كل كتابة من الكتابات السابقة تسمى شكل مثلثي للعدد العقدي الغير المنعدم $z$.

### 04. أمثلة:

نعطي الشكل المثلثي ل:

- $z_1=2=2(1+0i)=2(\cos 0+\sin 0)=[2,0]$ .
- $z_2=-5=5(-1+0i)=5(\cos\pi+\sin\pi)=[2,\pi]$.
- $z_3=7i=7(0+i)=7\left(\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\right)=\left[7,\frac{\pi}{2}\right]$.

- $z_4=-\frac{3}{5}i=\frac{3}{5}(0-i)=\frac{3}{5}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\left[\frac{3}{5},-\frac{\pi}{2}\right]$
- $z_5=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$

**05.** ملحوظة:1) الشكل المثلثي ( حالات خاصة )

| الشكل المثلثي $a>0$ | مثال |
|---|---|
| $z=a=[a,0]$ | $z=3=[3,0]$ |
| $z=-a=[a,\pi]$ | $z=-3=[3,\pi]$ |
| $z=bi=\left[b,\frac{\pi}{2}\right]$ | $z=3i=\left[3,\frac{\pi}{2}\right]$ |
| $z=-bi=\left[b,-\frac{\pi}{2}\right]$ | $z=-3i=\left[3,-\frac{\pi}{2}\right]$ |
| لدينا : $z=[r,\alpha]$ و $-z=[r,\pi+\alpha]$ و $\bar{z}=[r,-\alpha]$ و $-\bar{z}=[r,\pi-\alpha]$ | $z=1+i=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$ فإن: $\bar{z}=\left[\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right]$ و $-z=\left[\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}+\pi\right]=\left[\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right]$ |

**06.** ملحوظة: $1+i=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$ و $1-i=\left[\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right]$ و $z_3=1+\sqrt{3}=\left[2,\frac{\pi}{3}\right]$ و $z_4=1-\sqrt{3}=\left[2,-\frac{\pi}{3}\right]$.

**07.** نتائج :

$z$ و $z'$ من $\mathbb{C}^*$ حيث $z=[r,\alpha]=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ و $z'=[r',\alpha']=r'(\cos\alpha'+i\sin\alpha')$

- $z\times z'=[r,\alpha]\times[r',\alpha']=[r\times r',\alpha\times\alpha']$ أو $z\times z'=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)\times r'(\cos\alpha'+i\sin\alpha')$
  أو $zz'=rr'(\cos(\alpha+\alpha')+i\sin(\alpha+\alpha'))$
- نتيجة لذلك: $z^n=[r,\alpha]^n=[r^n,n\alpha]$ أو $z^n=(r(\cos\alpha+i\sin\alpha))^n=r^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$
  حالة خاصة: $r=1$ نحصل على : $[1,\alpha]^n=[1^n,n\alpha]=[1,n\alpha]$
  أو أيضا: $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$ هي تسمى صيغة موافر ( formule de MOIVRE )
- $\frac{1}{z'}=\frac{1}{[r',\alpha']}=[r',-\alpha']$ أو $\frac{1}{z'}=\frac{1}{r'(\cos\alpha'+i\sin\alpha')}=\frac{1}{r'}(\cos(-\alpha')+i\sin(-\alpha'))$
- $\frac{z}{z'}=\frac{[r,\alpha]}{[r',\alpha']}=\left[\frac{r}{r'},\alpha-\alpha'\right]$ أو $\frac{z}{z'}=\frac{r(\cos\alpha+i\sin\alpha)}{r'(\cos\alpha'+i\sin\alpha')}=\frac{r}{r'}(\cos(\alpha-\alpha')+i\sin(\alpha-\alpha'))$
- $-z=-1\times z=[1,\pi][r,\alpha]=[r,\alpha+\pi]=r((\cos(\pi+\alpha)+i\sin(\pi+\alpha)))$
- $\bar{z}=r\overline{(\cos\alpha+i\sin\alpha)}=r(\cos\alpha-i\sin\alpha)=r(\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha))=[r,-\alpha]$

## 08. أمثلة:

نعط الشكل المثلثي ل:

- $i\times z=\left[1,\frac{\pi}{2}\right]\times[r,\alpha]=\left[r,\frac{\pi}{2}+\alpha\right]$
- $z_1=3+3i=3(1+i)=[3,0]\times\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]=\left[3\sqrt{2},0+\frac{\pi}{4}\right]$
- $z_2=-3-3i=-3(1+i)=[3,\pi]\times\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]=\left[3\sqrt{2},\pi+\frac{\pi}{4}\right]$
- $z_3=2i(7+7i)=14i(1+i)=\left[14,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]=\left[14\sqrt{2},\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right]$
- $z_4=\frac{1}{-4-4i}=\frac{1}{-4(1+i)}=\frac{1}{[4,\pi]\times\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]}=\frac{1}{\left[4\sqrt{2},\pi+\frac{\pi}{4}\right]}=\left[\frac{1}{4\sqrt{2}},-\frac{5\pi}{4}\right]=\left[\frac{1}{4\sqrt{2}},\frac{3\pi}{4}\right]$

## 09. تمرين : أعط الشكل المثلثي ل:

$z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $z_2=-8-8\sqrt{3}i$ و $z_3=\frac{5i}{-4-4i}$ و $z_4=\left(-8-8\sqrt{3}i\right)^{15}$ و $z_5=-\frac{5}{7}i\left(1+\sqrt{3}i\right)$.

## 10. ملحوظة: العلاقة التي تربط الشكل الجبري و الشكل المثلثي حيث $[|z|,\theta]=x+yi$ لدينا : $x=|z|\cos\theta$ و $y=|z|\sin\theta$

# VIII. الأعداد العقدية و الهندسة

## 01. زاوية محددة بمتجهتين و عمدة خارج لحقيهما:

❖ خاصية:

لتكن A و B و C و D أربع نقط من المستوى العقدي مختلفة مثنى مثنى ، ألحاقها $z_A$ و $z_B$ و $z_C$ و $z_D$ على التوالي لدينا:

قياس الزاوية الموجهة ل

- $\left(\vec{i},\overrightarrow{AB}\right)$ هو : $\overline{\left(\vec{i}\,,\,\overrightarrow{AB}\right)}\equiv\arg(z_B-z_A)\ [2\pi]$
- $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ هو : $\overline{\left(\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AC}\right)}\equiv\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\ [2\pi]$
- $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)$ هو : $\overline{\left(\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{CD}\right)}\equiv\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)\ [2\pi]$
- استقامية ثلاث نقط : A و B و C يكافئ : $\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)\equiv\pi[2\pi]$ أو $\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)\equiv0[2\pi]$
- توازي مستقيمين $(AB)$ و $(CD)$ يكافئ : $\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)\equiv\pi[2\pi]$ أو $\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)\equiv0[2\pi]$.
- تعامد مستقيمين $(AB)$ و $(CD)$ يكافئ : $\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ أو $\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.