

الدوال اللوغاريتمية

1. تعريف :

دالة اللوغاريتم النبيري هي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0, +\infty[$ والتي تنعدم في 1 و يرمز لها بالرمز : $\ln$

2. استنتاجات و خاصيات :

$$\begin{aligned} D_{\ln} &=]0, +\infty[\quad \left(\ln \left(\frac{1}{x} \right) \right) \\ \ln'(x) &= \frac{1}{x} \quad (\forall x \in]0, +\infty[) \quad \ln \text{ دالة } \ln \text{ تزايدية قطعا على }]0, +\infty[\\ \forall x > 0; \forall y > 0 \quad \ln x = \ln y &\Leftrightarrow x = y \\ \forall x > 0; \forall y > 0 \quad \ln x > \ln y &\Leftrightarrow x > y \\ \forall x > 0; \forall y > 0 \quad \ln x \leq \ln y &\Leftrightarrow x \leq y \\ \ln(1) &= 0 \\ \text{يوجد عدد حقيقي وحيد من } \mathbb{R} \text{ نرمز له بـ } e : &\text{ بحيث } e \simeq 2,718 \text{ و يحقق : } \ln(e) = 1 \\ \forall x > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \ln x = a &\Leftrightarrow x = e^a \\ \text{إشارة } \ln x : & \\ \bullet \text{ إذا كان : } 0 < x < 1 &\text{ فإن } \ln x < 0 \\ \bullet \text{ إذا كان : } x \geq 1 &\text{ فإن } \ln x \geq 0 \end{aligned}$$

3. العمليات على الدالة $\ln$

ليكن x و y من $]0, +\infty[$ و $r \in \mathbb{Q}$ لدينا :

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y) \quad \checkmark$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \quad \checkmark$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \quad \checkmark$$

$$\ln(x^r) = r \ln(x) \quad \checkmark$$

4. نهايات هامة :

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0^-$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = 0^-$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+$
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$	

5. المشتقة اللوغاريتمية :

خاصية :

إذا كانت U دالة قابلة للاشتقاق على مجال I بحيث : $\forall x \in I \quad U(x) \neq 0$ فإن الدالة $x \mapsto \ln U(x)$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $\forall x \in I \quad (\ln U(x))' = \frac{U'(x)}{U(x)}$ ملاحظة : إذا كانت U موجبة قطعاً : $(\ln(U(x)))' = \frac{U'(x)}{U(x)}$
--

نتيجة :

مجموعة الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{U'(x)}{U(x)}$ هي الدوال : $x \mapsto \ln U(x) + \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

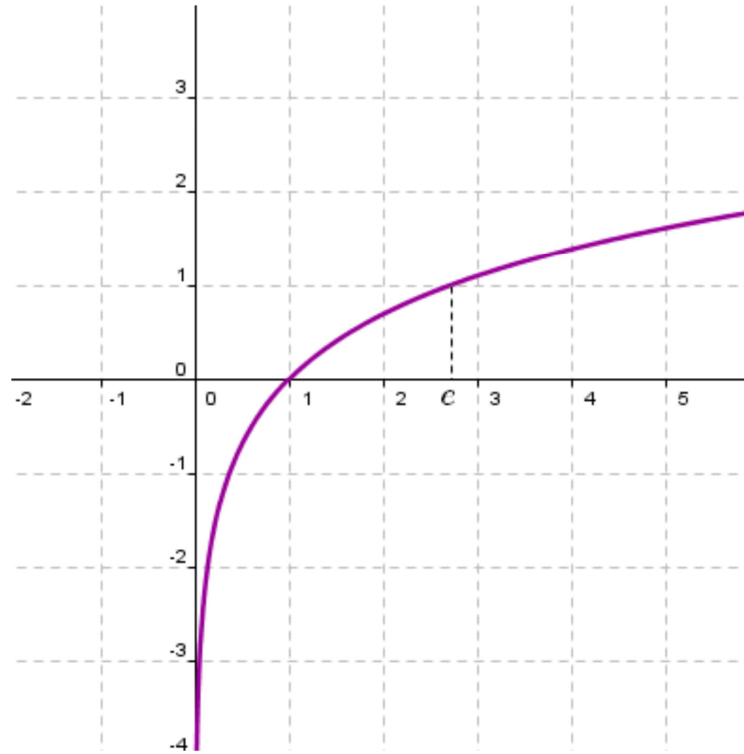
6. دراسة الدالة $\ln$

لدينا $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ إذن $(C_{\ln})$ يقبل مقارباً عمودياً معادلته $x = 0$

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ إذن $(C_{\ln})$ يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

الدالة $\ln$ تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$ و لدينا : $\ln(1) = 0$ و $\ln(e) = 1$

التمثيل المبياني للدالة $\ln$:



7. دالة اللوغاريتم للأساس a

أ. تعريف :

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعيا و يخالف 1

دالة اللوغاريتم للأساس a هي الدالة المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$ ($\forall x > 0$)

أمثلة : $\log_e(x) = \ln x$

$$\log_a(1) = 0$$

$$\log_a(a) = 1$$

ب. العمليات :

ليكن x و y من $]0, +\infty[$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad (1)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \quad (2)$$

$$\log_a \left(\frac{1}{x} \right) = -\log_a (x) \quad (3)$$

$$\log_a (x^r) = r \log_a (x) \quad (4)$$

$$\log_{\frac{1}{a}} (x) = -\log_a (x) \quad \text{ملاحظة :}$$

ج. حالة خاصة :

تعريف:

دالة اللوغاريتم العشري هي دالة اللوغاريتم للأساس 10 و نرمز لها ب : $\log_{10}$ أو فقط $\log$

$$\log(10^x) = x \quad \text{أمثلة :}$$

$$\log(0,1) = \log(10^{-1}) = -1$$

د. تغيرات الدالة $\log_a$

$$\log_a \text{ قابلة للاشتقاق على }]0, +\infty[\text{ و لدينا : } \log'_a (x) = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (\forall x > 0)$$

الحالة 1:

إذا كان $0 < a < 1$: الدالة $\log_a$ تناقصية قطعاً على $]0, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a (x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a (x) = +\infty$$

الحالة 2:

إذا كان $a > 1$: الدالة $\log_a$ تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a (x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a (x) = -\infty$$