

I. تقديم الدالة  $f(x) = \ln(x)$  ( اللوغاريتم النيبيري ) :

## 01. تقديم الدالة اللوغاريتم النيبيري :

❖ نشاط :

لنعتبر الدالة العددية المعرفة ب :  $f: ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ 

$$x \rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$$

(1) هل  $f$  تقبل دالة أصلية على المجال  $]0, +\infty[$  ؟ علل جوابك(2) كم توجد من دالة أصلية  $F$  ل  $f$  حيث  $F(1) = 0$  ؟

❖ مفردات :

الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f(x) = \frac{1}{x}$  على  $]0, +\infty[$  حيث  $F(1) = 0$ 

- نرسم لها ب  $F(x) = \ln(x)$
- الدالة  $F$  تسمى الدالة اللوغاريتم النيبيري

❖ تعريف :

الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f(x) = \frac{1}{x}$  على المجال  $]0, +\infty[$  و التي تنعدم في 1 ( أي  $F(1) = 0$  ) تسمى الدالة اللوغاريتم النيبيري و يرمز لها ب  $F(x) = \ln(x)$

❖ ملحوظة :

بدلا من كتابة :  $F(x) = \ln(x)$  نكتب :  $f(x) = \ln(x)$ 

❖ نتائج :

- الدالة  $f(x) = \ln(x)$  مجموعة تعريفها هي  $D_f = ]0, +\infty[$
- $f(1) = \ln(1) = 0$
- الدالة  $f(x) = \ln(x)$  قابلة للاشتقاق على  $]0, +\infty[$  و دالتها المشتقة هي  $f'(x) = [\ln(x)]' = \frac{1}{x} > 0$
- إذن الدالة  $f(x) = \ln(x)$  تزايدية قطعا على  $]0, +\infty[$
- $\forall a, b \in ]0, +\infty[ , a < b \Leftrightarrow \ln(a) < \ln(b)$
- $\forall a, b \in ]0, +\infty[ , a = b \Leftrightarrow \ln(a) = \ln(b)$

01. إشارة  $\ln(x)$  هي كما يلي :إشارة  $\ln(x)$  : نعلم أن :  $\ln(1) = 0$ لدينا : (1)  $x > 1 \Rightarrow \ln(x) > 0$ (2)  $0 < x < 1 \Rightarrow \ln(x) < 0$ 

| <b>x</b>                   | <b>0</b>  | <b>1</b> | <b><math>+\infty</math></b> |          |
|----------------------------|-----------|----------|-----------------------------|----------|
| <b><math>\ln(x)</math></b> | <b>  </b> | <b>-</b> | <b>0</b>                    | <b>+</b> |



تطبيق:

1) مجموعة تعريف الدالة أ -  $f(x) = \frac{2}{\ln(x)}$  ب -  $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$

2) حل المعادلة:  $\ln(2x) - \ln(x-1) = 0$

3) حل المتراجحة:  $\ln(2x) - \ln(x-1) \leq 0$

02. المشتقة اللوغاريتمية لدالة:

❖ تعريف و خاصية:

لتكن  $u$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$   $\forall x \in I : u(x) \neq 0$ .الدالة:  $f(x) = \ln|u(x)|$  قابلة للاشتقاق على المجال  $I$  و دالتها المشتقة هي:  $f'(x) = \left[ \ln|u(x)| \right]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$  (أي المشتقة اللوغاريتمية ل  $u$  على  $I$ ).الدالة  $x \rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)}$  تسمى المشتقة اللوغاريتمية للدالة  $u$  على المجال  $I$ .

❖ برهان:

لدينا:  $u$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  إذن  $u$  متصلة على  $I$ . بمأن:  $\forall x \in I : u(x) \neq 0$  إذن  $u(x) < 0$  و إما  $u(x) > 0$ .• حالة:  $u(x) > 0$  ومنه:  $f(x) = \ln|u(x)| = \ln(u(x))$ بمأن  $u(x) > 0$  إذن  $u(I) \subset ]0, +\infty[$  ومنه الدالة  $x \rightarrow \ln(x)$  قابلة للاشتقاق على  $u(I)$ ومنه:  $I \xrightarrow{u} u(I) \xrightarrow{\ln} \mathbb{R}$  $x \longrightarrow u(x) \longrightarrow \ln(u(x)) = \ln \circ u(x)$ إذن:  $f$  قابلة للاشتقاق لأنها مركبة دالتين قابلتين للاشتقاق ومنه:

$$f'(x) = [\ln|u(x)|]' = [\ln(u(x))]' = [\ln \circ u(x)]' = u'(x) \times \ln' \circ u(x) = u'(x) \times \frac{1}{u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

• حالة:  $u(x) < 0$  ومنه: ( بنفس الطريقة نبرهن على ذلك )

❖ مثال:

نحسب:  $f'$  مع  $f(x) = [\ln|x^2 - x|]$ 

لدينا:  $f'(x) = [\ln|x^2 - x|]' = \frac{(x^2 - x)'}{x^2 - x} = \frac{2x - 1}{x^2 - x}$

❖ مثال:

لنعتبر الدالة:  $u(x) = 3x^2 - 5x$ أوجد الدالة المشتقة اللوغاريتمية ل  $u$ . الدالة المشتقة اللوغاريتمية ل  $u$  هي الدالة:  $x \rightarrow \frac{6x - 5}{3x^2 - 5x}$ 

❖ استنتاج

لتكن  $u$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  حيث  $\forall x \in I : u(x) \neq 0$ الدوال الأصلية للدالة:  $x \rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)}$  على المجال  $I$  هي الدوال التي على شكل  $F(x) = \ln|u(x)| + c$  مع  $(c \in \mathbb{R})$ .





❖ تمرين :

■ أوجد الدوال الأصلية للدالة:  $f(x) = \frac{5}{x-2}$  على  $]2, +\infty[$

03. الخصائص الجبرية:

❖ خاصيات:

لكل  $a$  و  $b$  من  $]0, +\infty[$ 

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln(a^r) = r \times \ln(a) \text{ مع } r \in \mathbb{Q}$$

$$\ln(\sqrt[3]{a}) = \frac{1}{3} \times \ln(a) \text{ و } \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \times \ln(a) : \text{ نستنتج}$$

❖ نبرهن على:  $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$ .

نعتبر  $a > 0$  (معلوم) و الدالة  $f(x) = \ln(ax)$  ثم الدالة  $g(x) = \ln(a) + \ln(x)$ . ومنه  $f(1) = \ln(a)$  و (1) و

$$(2) \quad g(1) = \ln(a)$$

•  $f$  و  $g$  معرفتين على  $]0, +\infty[$ .

$$\bullet \quad f'(x) = \left[ \ln(ax) \right]' = \frac{(ax)'}{ax} = \frac{1}{x} \text{ و } g'(x) = \left[ \ln(a) + \ln(x) \right]' = \frac{1}{x} \text{ ومنه } f'(x) = g'(x) : \text{ إذن}$$

$$(3) \quad f(x) = g(x) + c \text{ مع } c \in \mathbb{R} \text{ إذن } f(x) - g(x) = c \text{ وبالتالي } (f(x) - g(x))' = 0$$

نأخذ  $x = 1$  و منه  $f(1) = g(1) + c$  و حسب (1) و (2) نحصل على  $c = 0$  و بالتالي  $f(x) = g(x)$  حسب (3).

إذن:  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$  وذلك لكل  $x \in ]0, +\infty[$  نأخذ  $x = b$  نحصل على

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

خلاصة:  $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) : \forall a, b \in ]0, +\infty[$

❖ نبرهن على:  $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$ .نأخذ:  $b > 0$  لدينا:

$$\ln(1) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{b}{b}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(b \times \frac{1}{b}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln(b) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$$

خلاصة:  $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$ .❖ نبرهن على:  $\ln(a^r) = r \times \ln(a)$  مع  $r \in \mathbb{Q}$ 

بنفس الطريقة المستعمل في البرهان  $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$  مع اعتبار الدالة  $f(x) = \ln(x^r)$  و الدالة  $g(x) = r \ln(x)$



❖ تطبيق:

▪ نضع :  $\ln(2) \approx 0,69$  . أحسب :  $\ln(4)$  و  $\ln(8)$ ▪ بسط :  $\ln(\sqrt{3}) + \ln(9)$ ▪ بسط :  $\ln\left[(\sqrt{5})^{2012}\right] - \ln(\sqrt{5})$ 

❖ ملحوظة:

الكتابة :  $\ln(x) \times \ln(x) = \ln^2(x)$ الكتابة :  $\ln(x) \times \ln(x) \times \ln(x) = \ln^3(x)$ بصفة عامة :  $\underbrace{\ln(x) \times \ln(x) \times \dots \times \ln(x)}_n = \ln^n(x)$  ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ❖ تطبيق: بسط :  $\ln^2(3 - \sqrt{2}) - \ln^2(3 + \sqrt{2})$ 

04. نهايات اعتيادية :

❖ خاصيات:

الدالة :  $f(x) = \ln(x)$  معرفة على  $D_f = ]0, +\infty[$  إذن:▪  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$  ومنه الدالة  $f$  تقبل مقارب عمودي معادلته:  $x = 0$  ( اي محور الأرتيب )▪  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$  ( ومنه يجب دراسة الفرع اللانهائي بجوار  $+\infty$  )▪  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$  ومنه  $a = 0$  إذن الدالة  $f$  تقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأفاصيل.▪  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \times \ln(x) = 0^-$ ❖ برهان ل :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ ليكن  $A > 0$  نعتبر  $n$  أصغر عدد صحيح طبيعي حيث  $n \ln(2) > A$  إذن  $n \geq E\left(\frac{A}{\ln 2}\right) + 1$  .

ومنه :

إذا كان :  $x > 2^n$  فإن :  $\ln(x) > \ln(2^n)$ 

$$\Rightarrow \ln(x) > n \ln(2)$$

$$\Rightarrow \ln(x) > A ; (n \ln(2) > A)$$

ومنه :  $\forall A > 0 , \exists B = 2^n > 0 , x > B \Rightarrow \ln(x) > A$  .خلاصة :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$  .❖ برهن على :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$  ( يمكنك أن تضع  $X = \frac{1}{x}$  ) .❖ برهن على :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$





1. يمكنك اعتبار الدالة  $f(x) = 2\sqrt{x} - \ln(x)$ . ثم ادرس رتبة  $f$  على  $[1, +\infty[$

2. استنتج :  $0 \leq \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$  ثم النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ .

❖ **نبرهن على :**  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \times \ln(x) = 0^-$

نضع :  $X = \frac{1}{x}$  ومنه :  $x \rightarrow 0^+$  فإن  $X \rightarrow +\infty$ . إذن :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \times \ln(x) &= \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} \times \ln\left(\frac{1}{X}\right) \\ &= \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} \times (-\ln X) \\ &= \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{-\ln X}{X} \\ &= 0 \end{aligned}$$

**خلاصة :**  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \times \ln(x) = 0^-$

❖ **تطبيق:** أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{x}$

**05.** نهايات ضرورية معرفتها :  
❖ خاصيات:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$n \in \mathbb{N}^*; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \times \ln(x) = 0^-$$

❖ **نبرهن على :**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$

1. ادرس اشتقاق الدالة  $f(x) = \ln x$  في  $x_0 = 1$ .

2. استنتج نهاية :  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$

❖ **نبرهن على :**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$  يمكنك استعمال نفس الطريقة مع  $f(x) = \ln(x+1)$  و  $x_0 = 0$

❖ **تطبيق:** أحسب :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x^3}$  و  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x \times \ln(x)}$

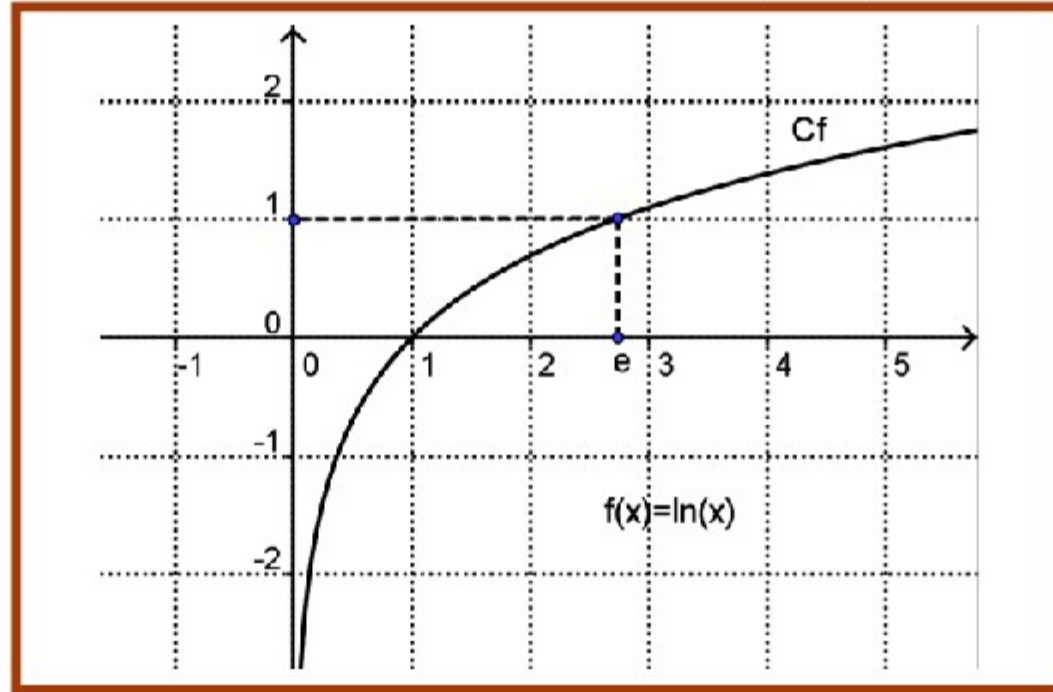
**06.** دراسة الدالة  $f(x) = \ln(x)$

• حسب ما سبق نستنتج: جدول تغيرات  $f$



| x    | 0 | 1 | $+\infty$ |
|------|---|---|-----------|
| $f'$ |   | + |           |
| $f$  |   |   | $+\infty$ |

- إنشاء منحنى الدالة:  $f$  في م. م.  $(0, i, j)$



❖ نتائج:

- الدالة  $f(x) = \ln(x)$  متصلة و تزايدية قطعاً على  $]0, +\infty[$
- $f$  تقابل من  $]0, +\infty[$  إلى  $]-\infty, +\infty[$
- المعادلة  $f(x) = 1$  (أي  $\ln(x) = 1$ ) تقبل حلاً وحيداً على  $]0, +\infty[$  ونرمز لهذا الحل بـ:  $e$  مع  $(e \approx 2,718)$  عدد اللاجذري
- $\forall r \in \mathbb{Q} : r = \ln(e^r)$

❖ مثال:

$$3 = \ln(e^3) \text{ و } -\frac{2}{7} = \ln\left(e^{-\frac{2}{7}}\right)$$

❖ تطبيق:

$$f(x) = \frac{1}{3 - \ln(x)} \text{ حدد مجموعة تعريف الدالة:}$$

II. دالة اللوغاريتم للأساس  $a$  مع:  $a \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$

❖ تعريف:

ليكن  $a$  من  $]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$  (  $a$  عدد موجب قطعاً و  $a \neq 1$  )

الدالة المعرفة كما يلي:  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

تسمى دالة اللوغاريتم للأساس  $a$  ونرمز لها بـ  $\log_a$ .





❖ نتائج:

$$\log_a(1) = \frac{\ln(1)}{\ln(a)} = 0 \quad \text{و} \quad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

$$\log_a(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(a)} = 1$$

$$\log_a(e) = \frac{\ln(e)}{\ln(a)} = \frac{1}{\ln(a)}$$

❖ ملحوظة:

$$\log_e = \ln \quad \text{إذن} \quad \log_e(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(e)} = \ln(x)$$

❖ خاصيات:

لكل  $x$  و  $y$  من  $]0, +\infty[$  و  $a \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$

$$\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$r \in \mathbb{Q} \quad \text{مع} \quad \log_a(x^r) = r \times \log_a(x)$$

$$\log_a(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{3} \times \log_a(x) \quad \text{و} \quad \log_a(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \times \log_a(x)$$

❖ نبرهن على:  $\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ 

$$\text{لدينا: } \log_a(x \times y) = \frac{\ln(x \times y)}{\ln(a)} = \frac{\ln(x) + \ln(y)}{\ln(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} + \frac{\ln(y)}{\ln(a)} = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\text{إذن: } \log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

❖ ملحوظة:

في حالة:  $a = 10$  الدالة:  $f(x) = \log_{10}(x)$  تسمى الدالة اللوغاريتم العشري ويرمز لها باختصار:  $f(x) = \text{Log}(x)$  إذن:

$$\log_{10} = \text{Log} \quad (\text{لدينا: } \log_{10}(x) = \text{Log}(x) \approx 0,43 \ln(x))$$

$$\text{Log}(10^r) = r ; \text{Log}(10) = 1 ; \text{Log}(1) = 0$$

التمثيل المبياني لـ  $f(x) = \log_a(x)$  نأخذ:  $a = 2$  و  $a = \frac{1}{2}$ .



## ❖ تمارين تطبيقية :

بسط التعابير التالية:

(1)  $\log_2(8) - \log_2(\sqrt[3]{32}) + \log_2(9) - \log_2(3)$

(2)  $\log_3\left(\frac{15}{4}\right) + \log_2\left(\frac{1}{27}\right) + \log_3\left(\frac{4}{5}\right)$

(3)  $\log(100) - \log(10^{2013}) + \log\left(\frac{1}{10^{100}}\right)$

(4) بين أن:  $\forall a, b \in ]1, +\infty[ \log_b(a) = \frac{1}{\log_a(b)}$

(5) حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة:  $\log_3(2x) \times (\log_5(x) - 1) = 0$

(6) حل في  $\mathbb{R}$  المتراجحة:  $\log_{\sqrt{3}}(3x-1) \geq \log_{\sqrt{3}}(x+1)$

(7) أدرس الدالة :  $f(x) = \log_5(x+1)$

