

السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	المتتاليات العددية حلول مقترحة	سلسلة 3
تمرين 1 :		
1	$v_n = u_n + \frac{1}{n} \text{ و } u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ و $v_n > u_n$ منه $v_n - u_n = \frac{1}{n}$ و : $0 < \frac{1}{(n+1)^2} = u_{n+1} - u_n$ إذن u_n تزايدية قطعاً ولدينا : $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{-1}{n(n+1)} = \frac{n - (n+1)}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$ إذن v_n تناقصية قطعاً ، بالتالي u_n و v_n متحاذيتان.	
2	$v_n = u_n + \frac{1}{nn!} \text{ و } u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ و $v_n > u_n$ منه $v_n - u_n = \frac{1}{nn!}$ (لأن $0 < \frac{1}{nn!} \leq \frac{1}{n}$) و : $0 < \frac{1}{(n+1)!} = u_{n+1} - u_n$ إذن u_n تزايدية قطعاً ولدينا : $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - u_n - \frac{1}{nn!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!}$ $= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$ إذن v_n تناقصية قطعاً ، بالتالي u_n و v_n متحاذيتان.	
تمرين 2 : $\begin{cases} u_0 = a ; v_0 = b \\ u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} , v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$ حيث $b > a > 0$		
1	بالنسبة لـ : $n = 0$: $0 < u_0 \leq v_0$ لأن : $b > a > 0$ نفترض أن : $0 < u_n \leq v_n$ منه : $u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} > 0$ و $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \geq 0$ إذن : $0 < u_{n+1} \leq v_{n+1}$	
2	لدينا : $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0$ إذن v_n تناقصية لدينا u_n : $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - u_n = \frac{u_n v_n - u_n^2}{u_n + v_n} = \frac{u_n (v_n - u_n)}{u_n + v_n} > 0$ إذن u_n تزايدية	
3	لدينا و $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ و $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{v_{n+1} - u_{n+1}}{v_n - u_n} = \frac{u_n - v_n}{2(u_n + v_n)} < \frac{1}{2}$ بالتالي $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2} (v_n - u_n)$	
🍏 (سبق وحسبنا الفرق $v_{n+1} - u_{n+1}$ وأيضا $\frac{u_n - v_n}{u_n + v_n} < 1$ لأن البسط أصغر من المقام)		

4	لدينا : $0 \leq v_n - u_n \leq \frac{1}{2} (v_{n-1} - u_{n-1})$ و $\dots$ و $0 \leq v_2 - u_2 \leq \frac{1}{2} (v_1 - u_1)$ و $0 \leq v_1 - u_1 \leq \frac{1}{2} (v_0 - u_0)$ بضرب المتفاوتات والاختزال نجد : $0 \leq v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n} (v_0 - u_0)$ أي $0 \leq v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n} (b - a)$
5	لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ (لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} (b - a) = 0$) و v_n تناقصية و u_n تزايدية، إذن v_n و u_n متقاربتان
أ	لدينا : $w_n = v_n - u_n$ إذن $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = v_n - u_n = w_n$ متتالية ثابتة
ب	لدينا w_n متتالية ثابتة إذن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = w_0 = ab$ ، منه : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n v_n = ab$ بما أن u_n و v_n متقاربتان نضع : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$ من $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n v_n = ab$ نستنتج أن : $\ell^2 = ab$ منه : $\ell = \sqrt{ab}$ أو $\ell = -\sqrt{ab}$ ولكون : $0 < u_n$ فإن : $\ell \geq 0$ بالتالي : $\ell = \sqrt{ab}$
تمرين 3 : $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$ و $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$	
1	أنظر السؤال الثاني من التمرين الأول
أ	نضع $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$ ونفترض أن ℓ عدد جذري أي $\ell = \frac{p}{q}$ حيث $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ لدينا u_n و v_n متحاذيتان نهايتهما ℓ إذن : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n < \ell < v_n$ منه : $u_q < \ell < v_q$ منه : $u_q < \frac{p}{q} < u_q + \frac{1}{qq!}$ منه : $0 < \frac{p}{q} - u_q < \frac{1}{qq!}$
ب	لدينا : $\frac{p}{q} - u_q = \frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!}\right) = \frac{p(q-1)! - q! - \frac{q!}{2} - \frac{q!}{3} - \dots - \frac{q!}{q}}{q!}$ وبما أن $\forall k \in \{1 \dots q\} \quad \frac{q!}{k} \in \mathbb{N}$ فإن : كسر مقامه $q!$ وبسطه عدد صحيح نسبي
3	لدينا : $\frac{p}{q} - u_q = \frac{a}{q!}$ / $a \in \mathbb{Z}$ و $0 < \frac{p}{q} - u_q < \frac{1}{qq!}$ منه : $0 < \frac{a}{q!} < \frac{1}{qq!}$ منه : $0 < qa < 1$ وهذا غير ممكن لأنه لا يوجد عدد صحيح نسبي محصور بين 0 و 1 بالتالي أن $\ell \notin \mathbb{Q}$