السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	المتتاليات العددية حلول مقترحة	سلسلة 2

تمرين 1 : نعتبر المتتالية : $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$ حيث $n \in IN$

1) لدينا : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{2^n}{n!}} = \dfrac{2\times 2^n}{n!\times(n+1)} \times \dfrac{n!}{2^n} = \dfrac{2}{n+1}$ $\quad \forall n \geq 3$

منه : $n \geq 3 \Rightarrow n+1 \geq 4 \Rightarrow \dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}$

2) حسب السؤال السابق نستنتج أن: $\dfrac{u_4}{u_3} \leq \dfrac{1}{2}$ و $\dfrac{u_5}{u_4} \leq \dfrac{1}{2}$ و ... و $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} \leq \dfrac{1}{2}$

بضرب هذه المتفاوتات طرفا بطرف و بعد الختزال نجد: $\dfrac{u_n}{u_3} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$ أي : $u_n \leq u_3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$

3) لدينا : $0 \leq u_n \leq u_3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$ و بما أن : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3} = u_3 \times 0 = 0$ فإن: $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = 0$

تمرين 2 : $u_n = 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$ لكل $n \in IN^*$

1) لدينا : $u_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0 \quad \forall n \in IN^*$ بالتالي المتتالية تزايدية قطعا.

2) لدينا لكل $k \in IN_{-\{0,1\}}$: $\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{1}{k(k-1)} - \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{k-(k-1)}{k^2(k-1)} = \dfrac{1}{k^2(k-1)} > 0$

منه : $\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} > \dfrac{1}{k^2}$

3) لدينا حسب السؤال السابق : $\dfrac{1}{2^2} < \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2}$ و $\dfrac{1}{3^2} < \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}$ و ... و $\dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$

بعد جمع المتفاوتات طرفا بطرف و التبسيط نجد: $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \ldots + \dfrac{1}{n^2} < 1 - \dfrac{1}{n}$ منه : $u_n < 2 - \dfrac{1}{n}$

4) لدينا حسب السؤال السابق $u_n < 2 - \dfrac{1}{n} < 2$ ، إذن المتتالية مكبورة بـ 2 و تزايدية قطعا فهي متقاربة.

لا يمكن القول أن المتتالية مكبورة بـ $2 - \dfrac{1}{n}$ لأنه تعبير يتضمن المتغير n و ليس بعدد ثابت.

تمرين 3 : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \; ; n \geq 0 \end{cases}$

1) سنبين أولا أن $u_n > 0 \quad \forall n \in IN$ ، بالنسبة لـ $n = 0$ ، $u_0 = 1 > 0$

نفترض أن $u_n > 0$ منه: $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} > 0$

الآن لدينا: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n} > 0 \quad \forall n \in IN$ منه $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية تزايدية قطعا.

2) نفترض أن u_n مكبورة ، إذن و لكونها تزايدية فهي متقاربة، نضع : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = a$ منه : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_{n+1} = a$

لدينا : $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \quad \forall n \geq 0$ منه : $u_n u_{n+1} = u_n^2 + 1 \quad \forall n \geq 0$

منه: $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}(u_n u_{n+1}) = \lim\limits_{n\mapsto+\infty}(u_n^2+1)$ منه: $a^2=a^2+1$ منه : $0=1$ و هذا غير ممكن

إذن u_n متتالية غير مكبورة

3 بما أن u_n متتالية تزايدية و غير مكبورة فإن: $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n=+\infty$

تمرين 4 : $u_n = 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}$ لكل $n\in IN^*$

1 لدينا: $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}>0$ $\forall n\in IN^*$ بالتالي المتتالية تزايدية قطعا.

2 لنبين بالترجع أن: $k!\ge 2^{k-1}$ لكل $k\in IN^*$

بالنسبة لـ $k=1$ $1!=2^{1-1}$، نفترض أن $k!\ge2^{k-1}$ ، إذن: $(k+1)!=(k+1)k!\ge(k+1)2^{k-1}\ge 2\times2^{k-1}\ge 2^k$

3 لدينا حسب السؤال السابق: $\frac{1}{1!}\le\frac{1}{2^0}$ و $\frac{1}{2!}\le\frac{1}{2^1}$ و $\frac{1}{3!}\le\frac{1}{2^2}$ و ... و $\frac{1}{n!}\le\frac{1}{2^{n-1}}$

إذن: $u_n\le 1+\frac12+\frac1{2^2}+....+\frac1{2^n} = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac12} = 2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)<2$

، إذن المتتالية مكبورة بـ 2 و تزايدية قطعا فهي إذن متقاربة.

تمرين 5 : $S_n = 1+\frac12+\frac13+...+\frac1n$ لكل $n\in IN^*$

1 لدينا: $S_{n+1}-S_n=\frac{1}{n+1}>0$ $\forall n\in IN$ ، بالتالي S_n تزايدية قطعا

2 لدينا : $S_{2n}=1+\frac12+\frac13+...+\frac1{2n}=\frac12+\frac13+...+\frac1n+\frac1{n+1}+\frac1{n+2}+...+\frac1{2n}$

منه : $S_{2n}-S_n=\frac1{n+1}+\frac1{n+2}+...+\frac1{2n}$

و لدينا : $\frac1{n+1}\ge\frac1{2n}$ و $\frac1{n+2}\ge\frac1{2n}$ و ... و $\frac1{2n}\ge\frac1{2n}$ منه : $S_{2n}-S_n\ge\underbrace{\frac1{2n}+\frac1{2n}+...+\frac1{2n}}_{n\ fois}=\frac12$

3 نفترض أن u_n مكبورة إذن و لكونها تزايدية فهي متقاربة ، نضع $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} S_n=a$ منه : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} S_{2n}=a$

منه : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}(S_{2n}-S_n)\ge\frac12$ منه $a-a\ge\frac12$ و هذا غير ممكن

إذن u_n غير مكبورة بالتالي $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n=+\infty$

3 لدينا : $p_{n+1}-p_n=(S_{2n+2}-S_{n+1})-(S_{2n}-S_n)=(S_{2n+2}-S_{2n})-(S_{n+1}-S_n)=\frac1{2n+2}+\frac1{2n+1}-\frac1{n+1}$

$=\frac{-1}{2(n+1)}+\frac1{2n+1}=\frac1{2(n+1)(2n+1)}>0$

إذن p_n تزايدية قطعا، من جهة أخرى لدينا : $\frac1{n+1}\le\frac1{n+1}$ و $\frac1{n+2}\le\frac1{n+1}$ و ... و $\frac1{2n}\le\frac1{n+1}$

منه : $p_n=S_{2n}-S_n\le\underbrace{\frac1{n+1}+\frac1{n+1}+...+\frac1{n+1}}_{n\ fois}=\frac{n}{n+1}<1$ ، إذن p_n مكبورة بـ 1 بالتالي فهي متقاربة.