التمرين الأول :

التمرين الأول :

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي : $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$

بين أن $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$ $(\forall k \geq 2)$ و إستنتج أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ مكبورة

التمرين الثاني :

التمرين الثاني :

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي : $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n+k}$

1) بين أن $U_n \geq \frac{1}{2}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

2) أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$

3) بين أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ متقاربة

التمرين الثالث :

التمرين الثالث :

نعتبر المتتالية $(x_n)_n$ المعرفة بما يلي : $x_0 = 1$ و $x_{n+1} = \sqrt[3]{1+\frac{1}{2}x_n^3}$

1) بين أن $0 < x_n < 2$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

2) بين أن المتتالية $(x_n)_n$ تزايدية و إستنتج أنها متقاربة

3) نضع $U_n = x_n^3 - 2$ بين أن $(U_n)_n$ متتالية هندسية و حدد $\lim_{n\to+\infty} x_n$

التمرين الرابع :

التمرين الرابع :

ليكن n من $\mathbb{N}^*$ ، نعتبر الدالة F_n المعرفة على المجال $[0,1]$ بما يلي : $F_n(x) = x^3 + nx - n$

1) بين أن $F_n(a_n) = 0$ $(\exists ! a_n \in]0,1[)$

2) أدرس رتابة المتتالية $(a_n)_n$ و إستنتج أنها متقاربة

3) حدد إشارة $F_n\left(1-\frac{1}{n}\right)$ و إستنتج $\lim_{n\to+\infty} a_n$

التمرين الخامس :

التمرين الخامس :

حدد نهاية المتتالية $(U_n)_n$ في كل من الحالات التالية :

$U_n = 5\times 3^{n+1} - 2\times 5^n$ ، $U_n = 2^n \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$ و $x \in \mathbb{R}^*$ ، $U_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{k=n} k$

$U_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{2}{k^2-1}$ ، $U_{n+1} \geq 2U_n$ و $U_0 \in \mathbb{R}^{*+}$ ، $U_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{4p^2-1}$

$U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} E(kx)$ و $x \in \mathbb{R}^*$ ، $U_n = \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$ ، $U_n = \frac{2^n}{n^3}$ ،

$U_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$ ، $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k+1}}{3^k}$ ، $U_n = \sum_{k=1}^{k=n^2} \frac{1}{1+\sqrt{kn}}$ ، $U_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{\sqrt{p+1}+\sqrt{p}}$

التمرين السادس:

نضع $S_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{\sqrt{p}}$ و نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$

1) بين أن $2\left(\sqrt{p+1} - \sqrt{p}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{p}}$ $\left(\forall p \in \mathbb{N}^*\right)$

2) إستنتج أن $S_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ و حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

3) بين بالترجع أن $S_n \leq \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ و إستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

التمرين السابع :

نعتبر الدالة F_n المعرفة على المجال $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $F_n(x) = 2x^3 - x^2 + 2(n+1)x - 1$ و $n \in \mathbb{N}^*$

1) بين أن $F_n(a_n) = 0$ $\left(\exists! a_n \in \left]0,1\right[\right)$

2) أ- أدرس إشارة $F_{n+1}(x) - F_n(x)$

ب- أدرس رتابة المتتالية $(a_n)_n$ و إستنتج أنها متقاربة

3) بين أن $a_n \leq \frac{1}{n+1}$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ و إستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

التمرين الثامن :

لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نعتبر الدالة F_n المعرفة على المجال $[0,1]$ بما يلي : $F_n(x) = (1-x)(x+1)^n$

1) أدرس منى تغيرات الدالة F_n

2) بين أن المعادلة $F_n(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا x_n

3) أ- بين أن $F_{n+1}(x) < F_n(x)$ $\left(\forall x \in \left]0,1\right[\right)$

ب- بين أن $x_{n+1} \in \left]\frac{n-1}{n+1}, 1\right[$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ ثم إستنتج رتابة المتتالية $(x_n)_n$

ج- حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

التمرين التاسع:

لتكن $(U_n)_n$ متتالية معرفة بما يلي : $U_0 = 0$ و $U_{n+1} = U_n^2 + 3U_n + 1$

1) أحسب U_1 و بين أن $(U_n)_n$ تزايدية

2) أ- بين أن $U_{n+1} \geq 3U_n$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$

ب- بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

1) نضع $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{2+U_k}$ لكل عدد طبيعي n

أ- تحقق أن $\frac{1}{2+U_k} = \frac{1}{1+U_k} - \frac{1}{1+U_{k+1}}$ $\left(\forall k \in \mathbb{N}\right)$

ب- بسط S_n ثم استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$

التمرين العاشر:

التمرين العاشر:

نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $f_n(x) = \arctan\left(\frac{x}{n}\right) + 2x - 1$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

1) أدرس رتابة الدالة f_n

2) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا b_n و أن $b_n < \frac{1}{2}$

3) أدرس إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ و استنتج رتابة المتتالية $(b_n)_n$

4) حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_n}{n}$ و استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$

التمرين الحادي عشر :

التمرين الحادي عشر :

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = \frac{1}{x} - 2\arctan x$

1) أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا a و أن $\frac{\sqrt{3}}{3} < a < 1$

ب- استنتج إشارة $g(x)$

2) نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{\arctan x}{x^2+1}$

أ- أدرس منحى تغيرات الدالة f على $[0,+\infty[$ و تحقق أن $f(a) = \frac{1}{2a(a^2+1)}$

ب- بين أن $0 \le f(x) \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$ $\left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right)$

3) بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن :

$$\left(\forall (x,x_0) \in \mathbb{R}^{+2}\right) \ / \ x > x_0 \quad : \ (\arctan x)^2 - (\arctan x_0)^2 \le \frac{3\sqrt{3}}{4}(x - x_0)$$

4) ليكن x من $\mathbb{R}^+$ و نضع $U_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{k=n}\left(\arctan\frac{x}{2^k}\right)^2$

أ- بين أن $(U_n(x))_n$ مكبورة بالعدد $\frac{3\sqrt{3}}{2}x$ و استنتج أنها متقاربة

ب- نضع $L(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n(x)$

(i) بين أن $\left(\forall (x,x_0) \in \mathbb{R}^{+2}\right) \quad |U_n(x) - U_n(x_0)| \le \frac{3\sqrt{3}}{4}|x - x_0| \sum\limits_{k=0}^{k=n}\frac{1}{2^k}$

(ii) استنتج أن الدالة L متصلة على $\mathbb{R}^+$