

التمرين الأول

ليكن a و b عددين مختلفين من $\mathbb{R}^*$. نعتبر المتتاليتين $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$ المعرفتين بما يلي :

$$\text{ونضع } S_n = U_n + V_n \text{ و } T_n = U_n - V_n \begin{cases} U_0 = a & ; & V_0 = b \\ U_{n+1} = \frac{aU_n + bV_n}{a-b} \\ V_{n+1} = \frac{bU_n + aV_n}{a-b} \end{cases}$$

1) بين أن $(T_n)_n$ متتالية ثابتة وأن $(S_n)_n$ هندسية محدد أساسها

2) حدد الحد العام لكل من المتتاليتين $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$

التمرين الثاني

نعتبر المتتالية $(x_n)_n$ المعرفة بما يلي : $x_0 = 1$ و $x_{n+1} = \sqrt[3]{1 + \frac{1}{2}x_n^3}$

1) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < x_n < 2$

2) بين أن المتتالية $(x_n)_n$ تزايدية واستنتج أنها متقاربة

3) نضع $U_n = x_n^3 - 2$ بين أن $(U_n)_n$ متتالية هندسية وحدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

التمرين الثالث

نضع $(\forall n \geq 1) \quad U_n = \frac{1}{2\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

1) بين أن $(\forall k \geq 1) \quad \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$

2) أ. حدد تأطيرا للمتتالية $(U_n)_{n \geq 1}$

ب. استنتج أن $(U_n)_{n \geq 1}$ متقاربة وحدد نهايتها

التمرين الرابع

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي : $U_0 = \frac{1}{4}$ و $U_{n+1} = \frac{1 - \sqrt{1 - U_n}}{2}$

1) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n = \sin^2\left(\frac{\pi}{6 \cdot 2^n}\right)$

2) أ. بين أن : $\left(\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) \quad \frac{2}{\pi}t \leq \sin t \leq t$

ب. استنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \sqrt[n]{\frac{1}{9 \cdot 4^n}} \leq \sqrt[n]{U_n} \leq \sqrt[n]{\frac{\pi^2}{4^n}}$ وحدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{U_n}$

التمرين الخامس

نضع $u_n = \sqrt[n]{n} - 1$ لكل عدد طبيعي n بحيث $n \geq 2$

1) بين أن $(\forall n \geq 2) \quad u_n \geq 0$

2) بين أن $(\forall n \geq 2) \quad n \geq C_n^2 (u_n)^2$ واستنتج أن $u_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$

3) بين أن $(u_n)_n$ متقاربة وحدد نهايتها

التمرين السادس

لتكن $(U_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية بحيث : $U_1 + U_2 + \dots + U_k = k^2 p$ و $U_1 + U_2 + \dots + U_n = n^2 p$

p, n , أعداد طبيعية غير منعدمة و $k \neq n$

1) بين أن $U_n - U_k = 2p(n-k)$

2) حدد أساس المتتالية $(U_n)_{n>0}$ وحدها الأول

3) استنتج أن $U_1 + U_2 + \dots + U_p = p^3$

التمرين السابع

ليكن n عددا من $\mathbb{N}^*$ ونعتبر الدالة f_n المعرفة على $]0,1[$ بما يلي : $f_n(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{\pi}{2nx}$

1) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n

2) بين أن المتتالية $(\alpha_n)_n$ تناقصية واستنتج أنها متقاربة

3) بين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$

4) أحسب النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \sqrt{n}$

التمرين الثامن

1) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $f(x) = x^3 + 2x - 1$

أ. بين أن f تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو مجال يتم تحديده

ب. استنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α وأن $\alpha < 1$

2) ليكن n عددا من $\mathbb{N}^*$

أ. بين أن المعادلة $f(x) = \frac{1}{n}$ تقبل حلا وحيدا نرمز له بالرمز V_n

ب. بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \alpha \leq V_n \leq 1$

ج. أدرس رتبة المتتالية $(V_n)_n$ واستنتج أنها متقاربة

3) أثبت أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \alpha$

التمرين التاسع

ليكن n من $\mathbb{N}^*$ ونضع $f_n(x) = x^3 + x^2 + nx - 2$ لكل x من المجال $[0, +\infty[$

1) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_n وأن $0 < x_n < 1$

2) تحقق أن $f_{n+1}(x_n) = x_n$ واستنتج أن المتتالية $(x_n)_n$ تناقصية

3) بين أن $(x_n)_n$ متقاربة وأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$

التمرين العاشر

ليكن a عدد حقيقي ونعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = a - \frac{1}{2}$ و $U_{n+1} = U_n^2 + (1-2a)U_n + a^2$

ونعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = x^2 + (1-2a)x + a^2$

1) أ. تحقق أن $f(x) - a = (x-a)(x-a+1)$

ب. استنتج أن $f([a-1, 1]) \subset [a-1, a]$

2) بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) \geq x$

3) أ. بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) a-1 < U_n < a$

ب. أدرس رتبة المتتالية $(U_n)_n$ واستنتج أنها متقاربة

ج. حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

التمرين الحادي عشر

1) $u_n = \left(\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1}$ و $v_n = \left(\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$ محاذيتان

2) $u_n = \prod_{k=1}^{k=n} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$ و $v_n = u_n \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ محاذيتان