

التمرين الأول

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي : $U_n = \frac{2^n n!}{(n+1)^n}$

(1) أ- بين أن $(\forall a > 0) (\forall n \in \mathbb{N}^*) (1+a)^n > 1+na$

ب- أحسب وبسط $\frac{U_n}{U_{n+1}}$ و استنتج أن $(U_n)_{n \geq 0}$ تناقصية

(2) أ- بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

ب- استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n}$

التمرين الثاني

ليكن p عددا حقيقيا بحيث $p \geq 1$ و نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = p$ و $U_{n+1} = p + \frac{1}{U_n}$

(1) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) p \leq U_n < p+1$

(2) نضع $x_n = U_{2n}$ و $y_n = U_{2n+1}$ لكل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}$

أ- بين أن لكل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}$ لدينا : $x_{n+1} = p + \frac{x_n}{p x_n + 1}$ و $y_{n+1} = p + \frac{y_n}{p y_n + 1}$

ب- بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) x_n < y_n$

ج- بين أن المتتالية $(x_n)_n$ تزايدية و استنتج رتبة المتتالية $(y_n)_n$

التمرين الثالث

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 0$ و $U_{n+1} = \frac{U_n + 6}{U_n + 2}$

(1) أ- بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n \geq 0$

ب- بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n \neq 2$

(2) أحسب U_1 ; U_2 ثم بين أن $U_{2k} \leq 2 \leq U_{2k+1}$ $(\forall k \in \mathbb{N})$

(3) بين أن $U_{n+1} - 2$ و $U_n - 2$ هما إشارتين مختلفتين

(4) أ- بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) U_n \geq 1$

ب- بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) |U_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{3} |U_n - 2|$

ج- استنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) |U_n - 2| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ثم حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

(5) لكل عدد طبيعي n غير منعدم نضع $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n} U_k$ ، $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n} U_{2k}$ و $b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n} U_{2k+1}$

أ- بين أن $2 - \frac{3}{9^k} \leq U_{2k} \leq 2$ و $2 \leq U_{2k+1} \leq 2 + \frac{1}{9^k}$ $(\forall k \in \mathbb{N})$

ب- استنتج أن $2 - \frac{11}{8n} + \frac{3}{8n} \left(\frac{1}{9}\right)^n \leq a_n \leq 2 + \frac{2}{n}$ و $2 + \frac{2}{n} \leq b_n \leq 2 + \frac{25}{8n} - \frac{3}{8n} \left(\frac{1}{9}\right)^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ثم حدد نهاية كل من المتتاليتين $(a_n)_n$ و $(b_n)_n$

التمرين الرابع

$$(1) \text{ بين أن } (\forall k \in \mathbb{N}^*) \quad \frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{2}{k^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{(k+1)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$$(2) \text{ نعتبر المتتالية } (S_n)_n \text{ المعرفة بما يلي : } S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \quad (\forall n \geq 1)$$

أ- بين أن $(S_n)_n$ مكبورة بالعدد 3

ب- بين أن $(S_n)_n$ متقاربة أن نهايتها l تنتمي إلى المجال $[2, 3]$

التمرين الخامس

لتكن $(U_n)_n$ متتالية حسابية أساسها r . نضع $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

$$(1) \text{ بين أن } 2S_{3n} = 3S_{2n} + 3n^2 r$$

$$(2) \text{ استنتج أن } S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$$

التمرين السادس

نعتبر المتتاليتين $(U_n)_{n \geq 1}$ و $(V_n)_{n \geq 1}$ المعرفتين بما يلي : $V_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2}$ و $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \arctan\left(\frac{k}{n^2}\right)$

$$(1) \text{ بين أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \frac{1}{2}$$

$$(2) \text{ بين أن } (\forall n \geq 1) \quad \sum_{k=1}^{k=n} k^3 \leq n^4$$

$$(3) \text{ أ- بين أن } (\forall t > 0) \quad t - \frac{t^3}{3} \leq \arctan t \leq t$$

$$\text{ب- بين أن } (\forall n \geq 1) : V_n - \frac{1}{3n^2} \leq U_n \leq V_n$$

ج- استنتج أن $(U_n)_{n \geq 1}$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين السابع

نعتبر الدالة f بحيث : $f(x) = \frac{1}{9}(x^3 + 6x + 1)$ و نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 0$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

$$(1) \text{ بين أن المعادلة } x^3 - 3x + 1 = 0 \text{ تقبل في المجال } \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ حلا وحيدا } \alpha$$

$$(2) \text{ بين أن المعادلة } f(x) = x \text{ تكافئ المعادلة } x^3 - 3x + 1 = 0$$

$$(3) \text{ أ- بين أن } (\forall x \in [0, \alpha]) : x \leq f(x)$$

$$\text{ب- بين أن } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq U_n \leq \alpha$$

ج- أدرس رتبة المتتالية $(U_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة و حدد نهايتها

التمرين الثامن

ليكن n عددا طبيعيا . نعتبر الدالة f_n المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $f_n(x) = x^n + 5x - 1$

$$(1) \text{ بين أن المعادلة } f_n(x) = 0 \text{ تقبل حلا وحيدا نرمز له بالرمز } \beta_n$$

$$(2) \text{ أ- أحسب } \beta_0, \beta_1, \beta_2$$

$$\text{ب- بين أن } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq \beta_n \leq \frac{1}{5} \text{ ثم استنتج } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\beta_n)^n$$

$$(3) \text{ أ- بين أن } (\forall x \in]0, 1]) \quad f_{n+1}(x) < f_n(x)$$

ب- استنتج أن المتتالية $(\beta_n)_n$ تزايدية

ج- استنتج أن المتتالية $(\beta_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها