

التمرين الأول

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + n - 1$ و $U_0 = 1$

(1) أ- بين أن $U_n \geq 0$ لكل عدد طبيعي $n \geq 3$

ب- بين أنه إذا كان $n \geq 4$ فإن $U_n \geq n - 2$ ماذا يمكن أن تستنتج ؟

(2) نضع $V_n = 4U_n - 8n + 24$

أ- بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية محددا أشاشها

ب- أحسب U_n بدلالة n

التمرين الثاني

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 0$ و $U_{n+1} = \frac{3}{\sqrt{6 - U_n^2}}$

(1) أ- بين أن $0 \leq U_n < \sqrt{3}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

ب- أدرس رتبة المتتالية $(U_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة

(2) نضع $V_n = \frac{U_n^2}{3 - U_n^2}$ لكل عدد طبيعي n

بين أن المتتالية $(V_n)_n$ حسابية و حدد U_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

التمرين الثالث

لتكن $(U_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي : $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{3k-2}{5^k}$

(1) تحقق أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية

(2) أ- بين أن $\forall n \in \mathbb{N}^* : U_{n+1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}U_n + \frac{3}{20} \left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$

ب- استنتج أن $(U_n)_n$ مكبورة

(3) بين أن $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين الرابع

لتكن $(U_n)_n$ متتالية حسابية أساسها r . نضع $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)

ليكن m و n عددين طبيعيين مختلفين .

(1) بين أن $S_m = S_n \Leftrightarrow (m+n-1)r = -2U_0$

(2) استنتج أن : $S_m = S_n \Rightarrow S_{m+n} = 0$

التمرين الخامس

أحسب نهايات المتتاليات التالية : $U_n = 5^n - 3^n$ ، $U_n = \frac{3^n - 1}{8^n - 2}$ ، $U_n = \frac{\cos(n)}{n+1}$ ،
 $U_n = \frac{n!}{2^n}$ ، $U_n = n + 3\sin(n)$ ، $U_n = \frac{(-1)^n + 2n}{2(-1)^n + 5}$ ، $U_n = \frac{n + (-1)^n}{n^2 + 1}$ ،
 $U_n = \frac{n + 2(-1)^n}{2n + (-1)^n}$ ، $U_n = \frac{3^n + (-2)^{n+1}}{3^n + (-2)^n}$ ، $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}$ ، $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

التمرين السادس

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $f_n(x) = x^3 + nx - 1$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

(1) ادرس رتبة الدالة f_n

(2) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا a_n في المجال $]0,1[$

(3) أ- بين أن $f_{n+1}(x) > f_n(x)$: $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$

ب- بين أن المتتالية $(a_n)_n$ تناقصية و استنتج أن المتتالية $(a_n)_n$ متقاربة

(4) أحسب $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$ و استنتج أن $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ و حدد نهاية المتتالية $(a_n)_n$

التمرين السابع

(I) ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعاً و n عددا طبيعيا بحيث $n \geq 2$

(1) نفترض أن $a > 1$. بين أن $\sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n}$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a}$

(2) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a}$ من أجل $0 < a < 1$

(II) نعتبر الدالة f_n المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $f_n(x) = x^n - 1 + \arctan x$

(1) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا a_n

(2) بين أن المتتالية $(a_n)_{n>0}$ محدودة

(3) ادرس إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ و ادرس رتبة المتتالية $(a_n)_{n>0}$

(4) حدد إشارة $f\left(\sqrt[n]{1 - \frac{\pi}{4}}\right)$ و بين أن المتتالية $(a_n)_{n>0}$ متقاربة وحدد نهايتها

التمرين الثامن

بين أن المتتاليتين $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متحاذيتين :

$$u_n = 2^{n+1} \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \text{ و } v_n = 2^{n+1} \tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \text{ حيث } \theta \text{ من المجال } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$