

### سلسلة المتتاليات العددية

(1) بين أن  $(u_n)_n$  تزايدية و  $(v_n)_n$  تناقصية

(2) أ) بين أن  $2 \leq u_n \leq 3$   $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب) بين أن  $2 \leq v_n \leq 3$   $(\forall n \in \mathbb{N})$

(3) أ) نضع  $I = [2, 3]$  . بين أن :

$$(\forall (x, y) \in I^2) |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} |x - y|$$

ب) استنتج أن  $|v_n - u_n| \leq 3^{-\frac{n}{3}}$   $(\forall n \in \mathbb{N})$

ج) بين أن  $(u_n)_n$  و  $(v_n)_n$  متحاديتان أن نهايتهما  $l$

$$x^3 - 9x + 9 = 0$$
 حل للمعادلة

### التمرين الرابع

نعتبر المتتالية  $(U_n)_n$  المعرفة بما يلي :

$$U_0 = a \quad \text{و} \quad U_{n+1} = \frac{2U_n^2 + 2U_n + 1}{2U_n + 1}$$

(1) نفترض أن  $a > 0$

أ- بين أن  $U > 0$   $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب- بين أن  $U_{n+1} \geq U_n + \frac{1}{2}$   $(\forall n \in \mathbb{N})$

ج- استنتج أن  $U_n \geq a + \frac{n}{2}$   $(\forall n \in \mathbb{N})$

د- أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

(2) نفترض أن  $a \leq -1$

أ- بين أن  $U_n \leq -1$   $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب- أدرس رتبة المتتالية  $(U_n)_n$

ج- استنتج أنها متقاربة ثم حدد نهايتها

### التمرين الخامس

ليكن  $a$  عددا حقيقيا لا ينتمي للمجال  $[0, 1]$  و نعتبر

$$\begin{cases} U_0 = a \\ U_{n+1} = U_n + E(U_n) \end{cases}$$
 المتتالية  $(U_n)_n$  المعرفة بما يلي :

(1) بين أن  $E(U_n) = 2^n E(a)$   $(\forall n \in \mathbb{N})$

(2) استنتج حسب قيم  $a$  نهاية المتتالية  $(U_n)_n$

### التمرين الأول

لتكن  $(U_n)_n$  متتالية معرفة بما يلي :

$$\text{ونضع } \begin{cases} U_0 = 1 & ; & U_1 = 3 \\ U_{n+2} = 8U_{n+1} - 7U_n \end{cases}$$

(1) أحسب  $U_2$  و  $V_2$

(2) بين أن  $(V_n)_n$  هندسية وأحسب  $V_n$  بدلالة  $n$

(3) أحسب بدلالة  $n$  الجمع  $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} V_k$

و استنتج  $U_n$  بدلالة  $n$  لكل  $n \geq 2$

### التمرين الثاني

نعتبر المتتالية  $(U_n)_n$  المعرفة بمايلي :

$$U_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + U_n} \quad \text{و} \quad U_0 = 1$$

(1) أحسب الحدود  $U_1$  ,  $U_2$  ,  $U_3$

(2) بين أن  $1 \leq U_n \leq \frac{3}{2}$   $(\forall n \in \mathbb{N})$

(3) بين أن  $|U_{n+1} - U_n| \leq \frac{1}{4} |U_n - U_{n-1}|$   $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

(4) نضع  $x_n = U_{2n}$  و  $y_n = U_{2n+1}$   $(\forall n \in \mathbb{N})$

أ) بين أن  $y_n = 1 + \frac{1}{1 + x_n}$   $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب) بين أن  $x_n \leq y_n$   $(\forall n \in \mathbb{N})$

ج) أدرس رتبة كل من  $(x_n)_n$  و  $(y_n)_n$

د) بين أن  $(x_n)_n$  و  $(y_n)_n$  متحاديتان

(5) أ) بين أن  $|U_{n+1} \sqrt{2}| \leq \frac{1}{4} |U_n - \sqrt{2}|$   $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ب) بين أن  $(U_n)_n$  متقاربة و حدد نهايتها

### التمرين الثالث :

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بما يلي :  $f(x) = \sqrt[3]{9(x-1)}$

و نعتبر المتتاليتين  $(u_n)_n$  و  $(v_n)_n$  المعرفتين بما يلي :

$$\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

### التمرين السادس

نعتبر المتتالية  $(U_n)_n$  المعرفة بما يلي :  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^k}$

$$(1) \quad \text{بين أن } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_n - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{n} \left( U_n - \frac{n}{n^n} \right)$$

$$(2) \quad \text{استنتج أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \quad \text{ثم حدد } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_n = \frac{n}{n^2-1} - \left( \frac{n^2}{n^2-1} \times \left( \frac{1}{n} \right)^n \right)$$

### التمرين السابع

حدد نهاية المتتالية  $(U_n)_n$  في كل من الحالات التالية :

$$a \in \mathbb{R}^* \quad \text{و} \quad U_n = n \left( \sin \left( \frac{na+1}{n} \right) - \sin a \right) \quad , \quad U_n = \left( \frac{\sin 2n}{3} \right)^n \quad , \quad U_n = \frac{n + \sin(n^2)}{n + \cos n}$$

$$U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{\sqrt{n^3+k}} \quad , \quad U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2+k} \quad , \quad U_n = n \arctan n - \frac{n^2}{n+1} \arctan(n+1)$$

$$U_n = \left( \sqrt{2} - \sqrt[3]{2} \right) \left( \sqrt{2} - \sqrt[5]{2} \right) \dots \left( \sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2} \right) \quad , \quad U_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1}}$$

### التمرين الثامن

لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على  $[0, +\infty[$  بما يلي :  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$

نعتبر المتتاليتين  $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2}$  و  $v_n = \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$  و  $v_n = \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$  لكل عدد طبيعي غير منعدم  $n$  ونضع

$$W_n = V_n - U_n$$

$$(1) \quad \text{بين أن } (\forall x \in \mathbb{R}) \quad |f(x) - x| \leq \frac{1}{2} x^2$$

$$(2) \quad \text{أ) بين أن } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad |W_n| \leq \frac{1}{2n^4} \sum_{k=1}^{k=n} k^2$$

$$\text{ب) استنتج أن } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad |W_n| \leq \frac{1}{2n} \quad \text{و حدد } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$$

### التمرين التاسع

$$(1) \quad \text{أ) بين أن } (\forall a > 0) (\forall n > 2) \quad (1+a)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} a^2$$

$$\text{ب) استنتج أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$(2) \quad \text{حدد نهاية كل من المتتاليتين } U_n = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} \quad \text{و} \quad V_n = \sqrt[n]{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}$$