

سلسلة المتتاليات العددية

1) بين ان $(u_n)_n$ تزايدية و $(v_n)_n$ تناقصية

2) أ) بين أن $2 \leq u_n \leq 3$

ب) بين أن $2 \leq v_n \leq 3$

3) أ) نضع $I = [2, 3]$. بين أن :

$$(\forall (x, y) \in I^2) |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} |x - y|$$

ب) استنتج أن $(v_n - u_n)_n$ متضمنة في I

ج) بين ان $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متضمنة في I

حل للمعادلة $x^3 - 9x + 9 = 0$

التمرين الرابع

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي :

$$U_0 = a \quad \text{و} \quad U_{n+1} = \frac{2U_n^2 + 2U_n + 1}{2U_n + 1}$$

نفترض أن $a > 0$

أ- بين ان $U > 0$

ب- بين أن $U_{n+1} \geq U_n + \frac{1}{2}$

ج- استنتج أن $U_n \geq a + \frac{n}{2}$

د- أحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$

نفترض أن $a \leq -1$

أ- بين أن $U_n \leq -1$

ب- أدرس رتبة المتتالية $(U_n)_n$

ج- استنتج أنها متقاربة ثم حدد نهايتها

التمرين الخامس

ليكن a عددا حقيقيا لا ينتمي للمجال $[0, 1]$ و نعتبر

$$\begin{cases} U_0 = a \\ U_{n+1} = U_n + E(U_n) \end{cases} \quad \text{المعرفة بما يلي :}$$

1) بين أن $(E(U_n))_n$ متضمنة في $[0, 1]$

2) استنتج حسب قيم a نهاية المتتالية $(U_n)_n$

التمرين الأول

لتكن $(U_n)_n$ متتالية معرفة بما يلي :

$$V_n = U_{n+1} - U_n \quad \text{و نضع} \quad \begin{cases} U_0 = 1 & ; \quad U_1 = 3 \\ U_{n+2} = 8U_{n+1} - 7U_n \end{cases}$$

1) أحسب U_2 و U_3

2) بين أن $(V_n)_n$ هندسية وأحسب V_n بدلالة n

3) أحسب بدلالة n الجمع

و استنتاج U_n بدلالة n لكل $n \geq 2$

التمرين الثاني

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي :

$$U_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + U_n} \quad \text{و} \quad U_0 = 1$$

1) أحسب الحدود U_3 ، U_2 ، U_1

2) بين أن $1 \leq U_n \leq \frac{3}{2}$

3) بين أن $|U_{n+1} - U_n| \leq \frac{1}{4} |U_n - U_{n-1}|$

4) نضع $y_n = U_{2n+1}$ و $x_n = U_{2n}$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) y_n = 1 + \frac{1}{1 + x_n}$$

ب) بين ان $x_n \leq y_n$

ج) أدرس رتبة كل من $(y_n)_n$ و $(x_n)_n$

د) بين ان $(y_n)_n$ و $(x_n)_n$ متضمنة في I

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) |U_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{4} |U_n - \sqrt{2}|$$

ب) بين أن $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين الثالث

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي :

و نعتبر المتتاليتين $(v_n)_n$ و $(u_n)_n$ المعرفتين بما يلي :

$$\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

التمرين السادس

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{n} \left(U_n - \frac{n}{n^n} \right) \text{ (1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n \text{ حدد ثم } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_n = \frac{n}{n^2 - 1} - \left(\frac{n^2}{n^2 - 1} \times \left(\frac{1}{n} \right)^n \right) \quad (2) \text{ استنتاج أن}$$

التمرين السابع

حدد نهاية المتالية (U_n) في كل من الحالات التالية :

$$a \in \mathbb{R}^* \text{ , } U_n = n \left(\sin \left(\frac{na+1}{n} \right) - \sin a \right) \quad , \quad U_n = \left(\frac{\sin 2n}{3} \right)^n \quad , \quad U_n = \frac{n + \sin(n^2)}{n + \cos n}$$

$$U_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{n^3 + k}} \quad , \quad U_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n^2 + k} \quad , \quad U_n = n \arctan n - \frac{n^2}{n+1} \arctan(n+1)$$

$$U_n = \left(\sqrt{2} - \sqrt[3]{2} \right) \left(\sqrt{2} - \sqrt[5]{2} \right) \dots \left(\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2} \right) \quad , \quad U_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1}}$$

التمرين الثامن

لتكن f دالة عددية معرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي :

نعتبر المتتاليتين $U_n = \sum_{k=1}^{n=n} \frac{k}{n^2}$ و $v_n = \sum_{k=1}^{n=n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) v_n = \sum_{k=1}^{n=n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n و نضع

$$W_n = V_n - U_n$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad |f(x) - x| \leq \frac{1}{2}x^2 \quad (1)$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |W_n| \leq \frac{1}{2n^4} \sum_{k=1}^{k=n} k^2 \quad \text{أين أن} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n \quad \text{و حدد} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad |W_n| \leq \frac{1}{2n} \quad \text{ب) استنتج أن}$$

التمرين التاسع

$$(\forall a > 0)(\forall n > 2) \quad (1+a)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} a^2 \quad \text{بین ان} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad \text{استنتج أن}$$

$$2) \text{ حدد نهاية كل من المتراليتين } V_n = \sqrt[n]{1^2 + 2^2 + \dots + n^2} \quad \text{ و } \quad U_n = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}$$