

المتتاليات العددية

1. تذكير:

أ. المتتاليات الحسابية :

تعريف:

$$(u_n) \text{ حسابية } \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = r \text{ (أساس } r \text{)}$$

كتابة (u_n) بدلالة n :

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

حساب المجموع :

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_m = (m - p + 1) \cdot \left(\frac{u_p + u_m}{2} \right)$$

ب. المتتاليات الهندسية :

تعريف:

$$(v_n) \text{ هندسية } \Leftrightarrow v_{n+1} = qv_n \text{ (أساس } q \text{)}$$

كتابة v_n بدلالة n :

$$v_n = v_p \cdot q^{n-p}$$

حساب المجموع :

$$v_p + v_{p+1} + \dots + v_m = v_p \cdot \frac{1 - q^{m-p+1}}{1 - q} : q \neq 1 \text{ إذا كان } q \neq 1$$

$$v_p + v_{p+1} + \dots + v_m = (m - p + 1)v_p : q = 1 \text{ إذا كان } q = 1$$

ج. رتابة متتالية :

$$u_{n+1} - u_n \geq 0 \Leftrightarrow (u_n) \text{ تزايدية}$$

$$u_{n+1} - u_n \leq 0 \Leftrightarrow (u_n) \text{ تناقصية}$$

$$u_{n+1} = u_n \Leftrightarrow (u_n) \text{ ثابتة}$$

د. متتالية مصغرة - مكبورة - محدودة

$$m \leq u_n \Leftrightarrow (u_n) \text{ مصغرة بالعدد } m$$

$$u_n \leq M \Leftrightarrow (u_n) \text{ مكبورة بالعدد } M$$

$$m \leq u_n \leq M \Leftrightarrow (u_n) \text{ محدودة}$$

2. نهاية متتالية :

أ. تعاريف:

نقول أن نهاية المتتالية (u_n) هي العدد الحقيقي l إذا كان كل مجال مفتوح مركزه l يحتوي على جميع الحدود u_n ابتداء من رتبة معينة و نكتب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ أو $\lim u_n = l$

ب. أمثلة اعتيادية :

$$(p \in \mathbb{N}^*) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty \quad (1)$$

$$(p \in \mathbb{N}^*) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad (2)$$

ج. خاصية :

إذا كانت (u_n) تقبل نهاية فإن هذه النهاية تكون وحيدة .

د. تعاريف و مصطلحات :

- نقول إن (u_n) متقاربة إذا كانت تقبل نهاية منتهية
- نقول إن (u_n) متباعدة إذا كانت تقبل نهاية لا منتهية أو لا تقبل نهاية

3. العمليات على النهايات :

خاصيات :

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتان متقاربتان لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) + \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) \times \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_n} \right) &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)} \quad \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0 \right) \end{aligned}$$

- ملاحظة : الخاصيات بالنسبة للعمليات على النهايات غير المنتهية هي نفسها على الدوال العددية

4. النهايات و الترتيب :

خاصيات

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \Leftrightarrow \begin{cases} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l \end{cases} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} |u_n - \alpha| \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \Leftrightarrow \begin{cases} u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \end{cases} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \begin{cases} u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \end{cases} \quad (4)$$

5. نهاية المتتالية (q^n) :

خاصية :

$$q \leq -1 : (q^n) \text{ لا تقبل نهاية}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 : -1 < q < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1 : q = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty : q > 1$$

خاصية :

- كل متتالية تزايدية و مكبورة فهي متقاربة
- كل متتالية تناقصية و مصغورة فهي متقاربة

6. نهاية المتتالية (n^r) $(r \in \mathbb{Q}^*)$

خاصية

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^r = +\infty \text{ فإن } r > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^r = 0 \text{ فإن } r < 0$$

7. نهاية متتالية من نوع $v_n = f(u_n)$:

خاصية:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = f(l) \Leftrightarrow l \text{ متصلة في } f \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

8. نهاية متتالية من نوع $u_{n+1} = f(u_n)$

خاصية :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

إذا كانت f متصلة على I و $I \subset I$ و $f(I) \subset I$ و (u_n) متقاربة
فإن نهاية (u_n) هي حل للمعادلة $f(x) = x$

ملاحظة:

❖ إذا كانت (u_n) تناقصية فإن $u_n \leq u_0$

❖ إذا كانت (u_n) تزايدية فإن $u_0 \leq u_n$

9. متتاليتان متحاديتان :

إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتان إحداهما تناقصية و الأخرى تزايدية و كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ فإن (u_n) و (v_n) متقاربتان
و لهما نفس النهاية و نقول أنهما متحاديتان

ملاحظة :

❖ إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتان متحاديتان بحيث (u_n) تناقصية و (v_n) تزايدية فإن $v_n \leq u_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)