

تمارين: مبرهنة التزايد المتناهية

الثانية سلك بكالوريا علوم رياضية

تمارين محلولة

التمرين 1

نعتبر المتتالية (u_n) بحيث $u_0 = \frac{1}{2}$; $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = g(u_n)$

حيث $g(x) = \arctan(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \forall x \in [0; +\infty[$

1- بين أن المعادلة $g(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;1[$

2- بين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| < \frac{4}{5} |u_n - \alpha|$

3- استنتج أن (u_n) متقاربة محددا نهايتها

الحل

1- نبين أن المعادلة $g(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;1[$

نعتبر $h(x) = g(x) - x$ على $[0;1]$ لدينا h متصلة على $[0;1]$

لدينا $h'(x) = \frac{-1}{2(x^2 + 1)}$ ومنه h تناقصية قطعاً على $[0;1]$

لدينا $h(0) \times h(1) = \frac{\pi}{4} (\arctan(\sqrt{2} - 1) - 1)$

$0 < \arctan(\sqrt{2} - 1) < 1$ ومنه $(\sqrt{2} - 1 < 1, \quad \frac{\pi}{4} < 1 \text{ لأن } 0 < \sqrt{2} - 1 < \tan \frac{\pi}{4} < \tan 1)$

إذن $h(0) \times h(1) < 0$

إذن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;1[$

أي أن المعادلة $g(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;1[$

2- نبين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| < \frac{4}{5} |u_n - \alpha|$

لدينا $\forall x \in [0; +\infty[\quad g(x) \in]0;1[$

و حيث $u_0 = \frac{1}{2}$; $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = g(u_n)$ فان $0 < u_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (نبين ذلك بالترجع)

الدالة g متصلة في مجال مغلق طرفاه α و u_n وقابلة للاشتقاق في مجال مفتوح طرفاه α و u_n

ومنه يوجد c محصور قطعاً بين α و u_n حيث $g(u_n) - g(\alpha) = g'(c)(u_n - \alpha)$

أي أن $u_{n+1} - \alpha = \frac{-1}{2(1+c^2)}(u_n - \alpha)$ ومنه $|u_{n+1} - \alpha| = \frac{1}{2(1+c^2)} |u_n - \alpha|$

و حيث أن $0 < c < 1$ فان $\frac{1}{4} < \frac{1}{2(1+c^2)} < \frac{1}{2} < \frac{4}{5}$ ومنه $|u_{n+1} - \alpha| < \frac{4}{5} |u_n - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3- نستنتج أن (u_n) متقاربة محددا نهايتها

لدينا $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| < \frac{4}{5} |u_n - \alpha|$

$$|u_1 - \alpha| < \frac{4}{5} |u_0 - \alpha|$$

$$|u_2 - \alpha| < \frac{4}{5} |u_1 - \alpha|$$

$$\vdots$$

$$|u_n - \alpha| < \frac{4}{5} |u_{n-1} - \alpha|$$

بضرب أطراف المتفاوتات و الاختزال نحصل على $|u_n - \alpha| < \left(\frac{4}{5}\right)^n |u_0 - \alpha|$

وحيث $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n |u_0 - \alpha| = 0$ فان (u_n) متقاربة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$

التمرين 2

لتكن f دالة عددية معرفة على $[0;1]$ بما يلي $f(x) = \frac{1}{4} \tan \frac{1}{x+1}$

1- بين أن f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و أن $\forall x \in [0;1] \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1}$

2- بين أن $f([0;1]) \subset [0;1]$

3- أ- بين أنه : $\exists! \alpha \in]0;1[\quad f(\alpha) = \alpha$

ب- استنتج أن $\forall x \in]0;1[- \{\alpha\} \quad |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1} |x - \alpha|$

4- نعتبر المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 \in]0;1[- \{\alpha\} \\ u_{n+1} = \frac{1}{4} \tan \left(\frac{1}{u_n + 1} \right) \end{cases}$

أ- بين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4 \cos^2 1} \right)^n |u_0 - \alpha|$

ب- استنتج أن (u_n) متقاربة و حدد نهايتها.

الحل

f دالة عددية معرفة على $[0;1]$ بما يلي $f(x) = \frac{1}{4} \tan \frac{1}{x+1}$

4- نبين أن f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و أن $\forall x \in [0;1] \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1}$

$\forall x \in [0;1] \quad \frac{1}{x+1} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$ و $[0;1]$ قابلة للاشتقاق على $x \rightarrow \frac{1}{x+1}$

إذن f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$

$$\forall x \in [0;1] \quad f'(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{-1}{(x+1)^2} \right) \left[1 + \tan^2 \frac{1}{x+1} \right] = \frac{1}{4} \left(\frac{-1}{(x+1)^2} \right) \left[\frac{1}{\cos^2 \left(\frac{1}{x+1} \right)} \right] \text{ و}$$

$$\forall x \in [0;1] \quad |f'(x)| = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(x+1)^2} \right) \left[\frac{1}{\cos^2 \left(\frac{1}{x+1} \right)} \right]$$

الدالتان $x \rightarrow \cos x$ و $x \rightarrow \frac{1}{(x+1)^2}$ تناقصيتان على $[0;1]$ و $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1$

ومنه $\forall x \in [0;1] \quad \frac{1}{4} \leq \frac{1}{(x+1)^2} \leq 1 \quad ; \quad 1 \leq \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x+1}} \leq \frac{1}{\cos^2 1}$

إذن $\forall x \in [0;1] \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1}$

5- نبين أن $f([0;1]) \subset [0;1]$

$$\forall x \in [0;1] \quad f'(x) \leq 0 \text{ و } \forall x \in [0;1] \quad f'(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{-1}{(x+1)^2} \right) \left[\frac{1}{\cos^2 \left(\frac{1}{x+1} \right)} \right]$$

إذن f تناقصية على $[0;1]$ ومنه $f([0;1]) = \left[\frac{1}{4} \tan \frac{1}{2}; \frac{1}{4} \tan 1 \right] \subset [0;1]$

6- أ- نبين أنه : $\exists! \alpha \in]0;1[\quad f(\alpha) = \alpha$

نعتبر الدالة g المعرفة على $[0;1]$ بـ $g(x) = f(x) - x$

g متصلة على $[0;1]$

$g(1) = -1 + \frac{1}{4} \tan \frac{1}{2} \leq 0$ و $g(0) = \frac{1}{4} \tan(1) \geq 0$

إذن $\exists! \alpha \in]0;1[\quad f(\alpha) = \alpha$

ب- نستنتج أن $\forall x \in]0;1[- \{\alpha\} \quad |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1} |x - \alpha|$

ليكن $x \in]0;1[- \{\alpha\}$

لدينا f متصلة على مجال مغلق طرفاه α و x

f قابلة للاشتقاق على مجال I مفتوح طرفاه α و x

ومنه يوجد عدد c ينتمي إلى I حيث $f(x) - f(\alpha) = f'(c)(x - \alpha)$

و حيث أن $\forall x \in [0;1] \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1}$ فإن $\forall x \in]0;1[- \{\alpha\} \quad |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1} |x - \alpha|$

$$\begin{cases} u_0 \in]0;1[- \{\alpha\} \\ u_{n+1} = \frac{1}{4} \tan \left(\frac{1}{u_n + 1} \right) \end{cases} \quad -4$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4 \cos^2 1} \right)^n |u_0 - \alpha| \quad \text{أ- نبين أن}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{4} \tan \left(\frac{1}{u_n + 1} \right) = f(u_n) \quad \text{لدينا}$$

$$\dots\dots\dots \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in]0; 1[\quad \text{نبين بالترجع أن}$$

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1} |u_n - \alpha| \quad \text{و بالتالي} \quad |f(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1} |u_n - \alpha| \quad \text{ومنه}$$

$$|u_1 - \alpha| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1} |u_0 - \alpha| \quad \text{لدينا} \quad n = 0 \quad \text{من أجل}$$

$$|u_2 - \alpha| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1} |u_1 - \alpha| \quad \text{لدينا} \quad n = 1 \quad \text{من أجل}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4 \cos^2 1} |u_{n-1} - \alpha|$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4 \cos^2 1} \right)^n |u_0 - \alpha| \quad \text{بضرب أطراف المتفاوتات والاختزال نحصل على}$$

ب- نستنتج أن (u_n) متقاربة و حدد نهايتها.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4 \cos^2 1} \right)^n |u_0 - \alpha| \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{4 \cos 1} \right]^n = 0 \quad \text{متقاربة و} \quad \left(\left[\frac{1}{4 \cos 1} \right]^n \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{المتتالية}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha \quad \text{ومنه} \quad (u_n) \quad \text{متقاربة و}$$

التمرين 3

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (u_n) \quad \text{المتتالية العددية المعرفة بما يلي}$$

$$\forall x \in [0; 2] \quad g(x) = \arctan \sqrt{x+2} \quad \text{حيث}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \arctan x \leq x \quad \text{أ- 1) بين أن}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n \leq 2 \quad \text{ب) بين أن}$$

$$(u_n) \quad \text{متقاربة} \quad \text{ج) بين أن}$$

$$]0; 2[\quad \text{أ- 2) بين أن المعادلة} \quad g(x) = x \quad \text{تقبل حلا وحيدا} \quad \alpha \quad \text{من}$$

$$\forall x \in]0; 2[\quad g'(x) \leq \frac{1}{6\sqrt{2}} \quad \text{ب) أثبت أن}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \quad \text{استنتج} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}} |u_n - \alpha| \quad \text{ج) بين أن}$$

الحل

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \arctan x \leq x \quad \text{أ- 2) نبين أن}$$

لدينا $x \rightarrow \arctan x$ و $x \rightarrow x$ متصلتان على $\mathbb{R}^+$ و قابلتان للاشتقاق على $]0; +\infty[$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (x)' = x$$

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad \frac{1}{1+x^2} < 1 \quad \text{لدينا} \quad \arctan 0 = 0 \quad \text{و}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \arctan x \leq x \quad \text{إذن}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n \leq 2 \quad \text{ب) نبين أن}$$

$$\text{من أجل } n=0 \text{ لدينا } 0 \leq u_0 \leq 2 \quad \text{لان } u_0 = 2$$

$$\text{نفترض أن } 0 \leq u_n \leq 2 \quad \text{ونبين أن } 0 \leq u_{n+1} \leq 2$$

$$\text{لدينا } \forall x \in [0; 2] \quad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}(3+x)} > 0 \quad \text{ومنه } g \text{ تزايدية على } [0; 2]$$

$$\text{وحيث أن } 0 \leq u_n \leq 2 \quad \text{فان } g(0) \leq g(u_n) \leq g(2) \quad \text{أي } g(0) \leq u_{n+1} \leq g(2)$$

$$\text{لدينا } g(2) = \arctan 2 \leq 2 \quad ; \quad g(0) = \arctan \sqrt{2} \geq 0$$

$$\text{ومنه } 0 \leq u_{n+1} \leq 2 \quad \text{إذن } \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n \leq 2$$

ج) نبين أن (u_n) متقاربة

لندرس رتبة (u_n)

$$\text{لدينا } u_1 = g(u_0) = g(2) = \arctan 2 \quad \text{ومنه } u_1 \leq u_0$$

$$\text{نفترض أن } u_{n+1} \leq u_n \quad \text{نبين أن } u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

$$\text{لينا } u_{n+1} \leq u_n$$

$$\text{و حيث أن } g \text{ تزايدية على } [0; 2] \quad \text{فان } g(u_{n+1}) \leq g(u_n) \quad \text{أي أن } u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

$$\text{إذن } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq u_n$$

$$\text{ومنه } (u_n) \text{ تناقصية و بما أن } (u_n) \text{ مصغورة بالعدد } 0 \quad \text{فان } (u_n) \text{ متقاربة}$$

$$\text{أ) نبين أن المعادلة } g(x) = x \text{ تقبل حلا وحيدا } \alpha \text{ من }]0; 2[\quad \text{ج)}$$

$$\text{نعتبر الدالة } h \text{ حيث } h(x) = g(x) - x$$

$$h \text{ متصلة على } [0; 2] \text{ قابلة للاشتقاق على }]0; 2[$$

$$\text{و } h(0) \times h(2) = (\arctan \sqrt{2})(-2 + \arctan 2) < 0$$

$$\text{ومنه المعادلة } h(x) = 0 \text{ تقبل حلا في }]0; 2[$$

$$\text{لدينا } h'(x) = g'(x) - 1 = \frac{1}{2\sqrt{x+2}(3+x)} - 1 = \frac{1 - 2\sqrt{x+1}(x+3)}{2\sqrt{x+2}(3+x)}$$

$$\text{وحيث } 1 - 2\sqrt{x+1}(x+3) < 0 \quad \forall x \in]0; 2[\quad \text{فان } h \text{ تناقصية قطعاً على }]0; 2[$$

$$\text{إذن المعادلة } h(x) = 0 \text{ تقبل حلا وحيدا في }]0; 2[$$

$$\text{ب) نثبت أن } \forall x \in]0; 2[\quad g'(x) \leq \frac{1}{6\sqrt{2}}$$

$$\text{ليكن } x \in]0; 2[\quad \text{لدينا } g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}(3+x)}$$

$$\text{بما أن } 0 < x < 2 \quad \text{فان } 3 < x+3 < 5 \quad \text{و } 2\sqrt{2} < 2\sqrt{x+2} < 4$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x+2}(3+x)} \prec \frac{1}{6\sqrt{2}} \quad \text{ومنه} \quad 6\sqrt{2} \prec 2(x+3)\sqrt{x+2} \prec 20$$

$$\forall x \in]0; 2[\quad g'(x) \leq \frac{1}{6\sqrt{2}} \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \quad \text{و نستنتج} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}} |u_n - \alpha|$$

g متصلة على $[0; 2]$ و قابلة للاشتقاق على $]0; 2[$ و $\alpha \in]0; 2[$ و $u_n \in [0; 2]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ومنه يوجد c من $]0; 2[$ حيث $g(u_n) - g(\alpha) = g'(c)(u_n - \alpha)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ و بالتالي $|g(u_n) - g(\alpha)| = |g'(c)| |u_n - \alpha|$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |g(u_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}} |u_n - \alpha| \quad \text{فان} \quad |g'(c)| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}} \quad \text{و حيث}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}} |u_n - \alpha| \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \quad \text{نستنتج}$$

لدينا

$$|u_1 - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}} |u_0 - \alpha|$$

$$|u_2 - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}} |u_1 - \alpha|$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}} |u_{n-1} - \alpha|$$

بضرب أطراف المتفاوتات و الاختزال نحصل على

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{6\sqrt{2}} \right)^n |u_0 - \alpha|$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha \quad \text{فان} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{6\sqrt{2}} \right)^n = 0 \quad \text{و حيث}$$