

مبرهنة رول و مبرهنة التزايد المتناهية:

التمرين رقم 01 (مبرهنة Taylor – Lagrange)

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق $(n+1)$ مرة على مجال I من $\mathbb{R}$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

ليكن a و b عددين حقيقيين من المجال I بحيث $a < b$

$$\Psi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x) \frac{(b-x)^k}{k!} - \frac{(b-x)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}} \left(f(b) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} \right)$$

1 - أحسب $\Psi'(x)$ لكل $x \in]a, b[$

2 - بين أنه يوجد عدد حقيقي c من المجال $]a, b[$ بحيث :

$$f(b) - f(a) = f'(a) \frac{(b-a)}{1!} + f''(a) \frac{(b-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(a) \frac{(b-a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(c) \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

3 - لتكن f دالة قابلة للاشتقاق 3 مرات على مجال I من $\mathbb{R}$. وليكن a و b عددين حقيقيين من المجال I بحيث $a < b$ بين أنه يوجد عدد حقيقي c من المجال $]a, b[$ بحيث:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a) + \frac{1}{2}(b-a)f''(a) + \frac{1}{6}(b-a)^2 f'''(c)$$

التمرين رقم 02 : (Règle de L'Hospital)

لتكن f و g دالتين عدديتين متصلتين على مجال $]a, b[$ و قابلتين للاشتقاق على المجال $]a, b[$

1 - بين أنه: $(\exists c \in]a, b[): (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$

2 - نفترض أن $(\forall x \in]a, b[): g'(x) \neq 0$

ليكن $x_0 \in]a, b[$ بحيث $f(x_0) = g(x_0) = 0$

a - بين أن: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\text{Arc tan} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}{\sin \left(\frac{4}{\pi} x - 1 \right)} \quad \text{b - استنتج}$$

التمرين رقم 03:

1 - بين أن: $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2): |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2): |\cos x - \cos y| \leq |x - y|$

2 - لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي

$$f(x) = \sin(\cos x) - \cos(\sin x)$$

a - بين أن: $(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]): f(x) < -2 \sin\left(\frac{x + \sin x}{2}\right) \sin\left(\frac{x - \sin x}{2}\right)$

بين أن: $(\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]): \sin(\cos x) \leq 0$ و $\cos(\sin x) > 0$

استنتج أن: $(\forall x \in \mathbb{R}): f(x) < 0$

الثانية علوم رياضية - ثانوية الجولان التأهيلية - بيوكري -