

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x & ; x \geq 0 \\ f(x) = \frac{4}{\pi} \arctan(\sqrt{x^2 + 1} - x) & ; x < 0 \end{cases}$$

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ما يلي :

(1) أدرس اتصال و قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0 = 0$ على اليمين و اليسار

(2) أ- بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}^*) f'(x) < 0$

ب- أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم ضع جدول تغيرات f

(3) نضع $I = \left[\frac{1}{4}, 1\right]$ و نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 1$; $U_{n+1} = f(U_n)$

أ- بين أن $f(I) \subseteq I$

ب- بين أن $(\forall x \in I) |f'(x)| \leq \frac{4}{5}$ و أن $\left|U_{n+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right| \leq \frac{4}{5} \left|U_n - \frac{1}{\sqrt{3}}\right|$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

ج- بين أن $(U_n)_n$ متقاربة وحدد نهايتها

د- بين أن $\left(\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[: f\left(\frac{1}{\tan x}\right) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right.$

هـ- نضع $a_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$ (i) أحسب a_0 و بين أن $a_{n+1} = 2^{n+1} - a_n$ (ii) بين أن $U_n = \tan\left(\frac{\pi a_n}{2^{n+2}}\right)$

التمرين رقم 2

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3} - x & ; x \leq 0 \\ f(x) = 2\sqrt{x^2 + 1} \arctan x & ; x > 0 \end{cases}$$

و C_f منحناها في معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ما يلي :

الجزء الأول : (1) أ- بين أن f متصلة في 0 ثم أدرس قابلية اشتقاق f على $\mathbb{R}$ و على يسار 0 و أعط تأويلا هندسيا للنتائج

ب- أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) أ- بين أن $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ ($\forall x > 0$) و بين أن المستقيم $y = \pi x - 2$ مقارب مائل للمنحنى عند $+\infty$

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى بجوار $-\infty$

(3) أحسب المشتقة $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^*$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f

(4) أدرس تقعر المنحنى C_f

(5) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty, -1]$ و أن $\alpha^3 + 4\alpha^2 - \alpha = 0$ ثم استنتج قيمة α

(6) أرسم المنحنى C_f

الجزء الثاني : ليكن g قصور الدالة f على المجال $\mathbb{R}^+$

(1) بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}^{++}) g'(x) > 2$ ثم استنتج أن $g(x) \geq x$ ($\forall x \in \mathbb{R}^+$)

(2) أ- بين أن g تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$

ب- بين أن الدالة العكسية g^{-1} قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{++}$ و أن $0 < (g^{-1})'(x) < \frac{1}{2}$ ($\forall x \in \mathbb{R}^{++}$)

ج- أنشئ منحنى الدالة العكسية g^{-1}

الجزء الثالث : لتكن $(U_n)_n$ متتالية بحيث : $U_{n+1} = g^{-1}(U_n)$; $U_0 \in]0, 1[$

(1) بين أن $0 < U_n < 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) و أثبت أن $(U_n)_n$ تناقصية و استنتج أنها متقاربة

(2) بين أن $U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم حدد نهاية المتتالية $(U_n)_n$ و حدد أصغر عدد طبيعي n يحقق $U_n \leq 0,1$