

التمرين الأول

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $x \neq 1$; $f(x) = (x-1) \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right)$ و $f(1) = 0$

(1) أدرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0 = 1$
بد أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0 = 1$

(2) بين أن المستقيم $x = 1$ محور تماثل للمنحنى (C_f)

(3) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(4) أ. بين أن $f'(x) = \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) - \frac{x-1}{1+(x-1)^2}$

ب. بين أن $\arctan t > \frac{t}{1+t^2}$ ($\forall t > 0$) وأدرس تغيرات الدالة f على المجال $]1, +\infty[$

(5) أرسم المنحنى (C_f)

التمرين الثاني

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

(1) بين أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأحسب المشتقة $f'(x)$

(2) أدرس منحنى تغيرات الدالة f

(3) أ. بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J يتعين تحديده

ب. بين أن $(\forall x \in J) f^{-1}(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(4) بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل في المجال $]0, 1[$ حلا وحيدا a

(5) نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة كما يلي : $U_0 = 0$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

أ. بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 \leq U_n < a$

ب. أدرس رقابة المتتالية $(U_n)_n$ واستنتج أنها متقاربة

ج. حدد نهاية المتتالية $(U_n)_n$

التمرين الثالث

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = 2x - 1 + \arctan x$

(1) أ. أحسب المشتقة $f'(x)$ وأنجز جدول تغيرات الدالة f

ب. استنتج أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} يتم تحديد مجموعة تعريفها D

(2) أ. بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α وبين أن $0 < \alpha < 1$

ب. بين أن $(\forall x > \alpha) f(x) > x$

(3) لتكن $(U_n)_n$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $U_0 = a > \alpha$ و $U_{n+1} = f^{-1}(U_n)$

أ. بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n > \alpha$

ب. أدرس رقابة المتتالية $(U_n)_n$ واستنتج أنها متقاربة

(4) أ. بين أن f^{-1} قابلة للاشتقاق على D وأن $\left| (f^{-1})'(x) \right| \leq \frac{1}{2}$ ($\forall x \in D$)

بد باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} - \alpha \leq \frac{1}{2}(U_n - \alpha)$
ج- بين أن $(U_n)_n$ متقاربة وحدد نهايتها

التمرين الرابع

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $x < 1$; $f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{1-x}}\right)$ و $f(1) = \frac{\pi}{2}$

- 1) أ- أدرس اتصال الدالة f على يسار النقطة $x_0 = 1$
بد أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0 = 1$ على اليسار
- 2) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 3) اعط معادلة المماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الأفصول $a = -1$
- 4) احسب المشتقة $f'(x)$ أنجز جدول تغيرات الدالة f
- 5) أ- بين أن f تقابل من $]-\infty, 1]$ نحو مجال J يتم تحديده
بد بين أن الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق في النقطة $b = 0$ و أحسب $(f^{-1})'(0)$
- 6) أرسم المنحنيين (C_f) و $(C'_{f^{-1}})$ في نفس المعلم

التمرين الخامس

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) & ; \quad x > 1 \\ f(x) = x \arctan \sqrt[3]{x^2} & ; \quad x \leq 1 \end{cases}$$

- 1) أ- بين أن f متصلة في النقطة $x_0 = 0$
بد أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين و على يسار النقطة $x_0 = 0$ و أعط تاويلا هندسيا للنتيجة
- 2) أ- أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و أعط تاويلا هندسيا للنتيجة
بد بين أن المنحنى يقبل عند $-\infty$ فرعاً شلجيميا في اتجاه المستقيم $y = -\frac{\pi}{2}x$
- (نذكر أن $(\forall t > 0) \arctan t + \arctan \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}$)
- 3) أ- أحسب المشتقة $f'(x)$ على كل من $]1, +\infty[$ و المجال $]-\infty, 1[$
بد أدرس تغيرات الدالة f ثم ضع جدول تغيراتها
- 4) ليكن g قصور الدالة f على المجال $]1, +\infty[$
أ- بين أن g تقابل من المجال $]1, +\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده
بد أحسب $g^{-1}(x)$ لكل x من المجال J
- 5) أرسم المنحنيين (C_f) و (C'_g) في نفس المعلم