

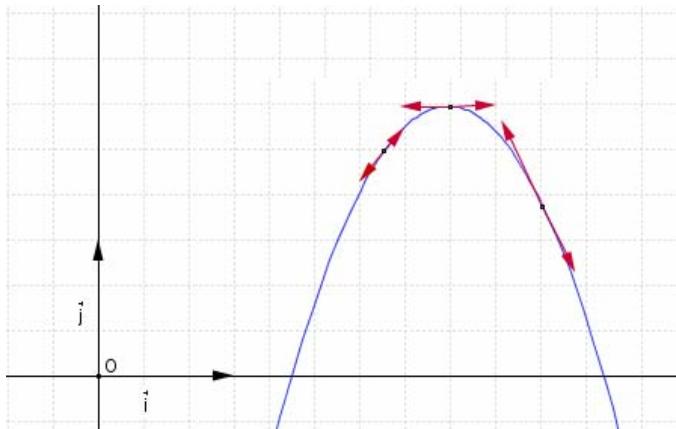
1- تغير منحنى دالة -- نقطة انعطاف

1-تعريف

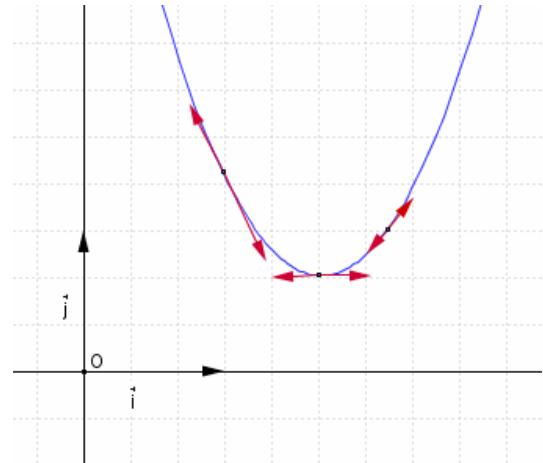
لتكن f قابلة للاشتـقاق على مجال I

نقول إن المنحنى (C_f) محدب إذا كان يوجد فوق جميع مماساته

نقول إن المنحنى (C_f) مقعر إذا كان يوجد تحت جميع مماساته



مقعر



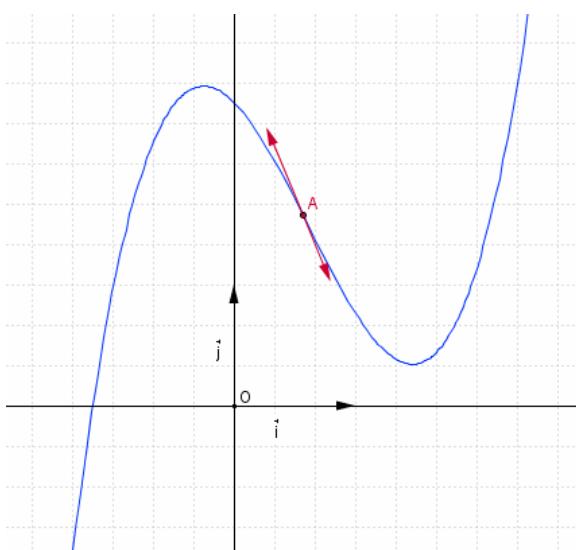
محدب

2-تعريف

لتكن f دالة عدديـة قابلة للاشتـقاق على مجال مفتوح I و $x_0 \in I$.

نقول إن النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نقطة انعطاف

للمـنـحنـى (C_f) إذا تغير تـغـيرـ المنـحنـى (C_f) عند A



3- خاصـات

f دالة قابلة للاشتـقاق مرتبـين على مجال I

* إذا كانت " f " موجـبة على I فـان (C_f) يكون مـحدـباـ على I

* إذا كانت " f " سـالـبةـ على I فـان (C_f) يكون مـقـعـراـ على I

* إذا كانت " f " تـنـعدـمـ في x_0 من المجال I وكان يوجد $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ بحيث إـشـارةـ " f " على $[x_0, x_0 + \alpha]$ يكون مـقـعـراـ على I مـخـالـفـ لـإـشـارةـ " f " على $[x_0 - \alpha, x_0]$ فـان $M_0(x_0; f(x_0))$ نقطة انعطاف لـلـمـنـحنـى (C_f)

ملاحظـة قد لا تكون الدالة f قابلة للاشتـقـاقـ مرتبـينـ ويـكـونـ معـ ذـلـكـ لـمـبـيـانـهاـ نقطـةـ انـعـطـافـ

$$g(x) = \frac{1-2x}{x^2-x-2} \quad \text{و} \quad f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$$

1- أدرس تـغـيرـ C_f و استـنـتـجـ أنـ النـقـطـةـ A ذاتـ الأـفـصـولـ 1ـ نقطـةـ انـعـطـافـ لـلـمـنـحنـى C_f

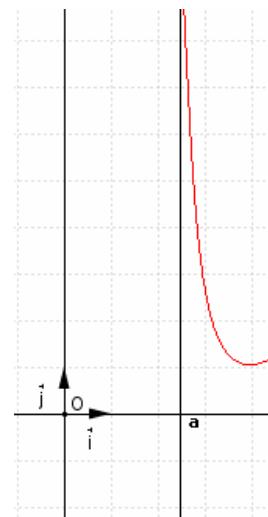
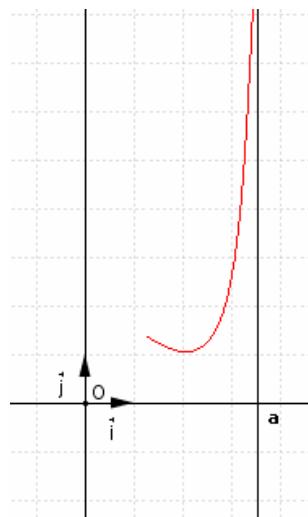
2- أدرس تـغـيرـ C_g و حـدـدـ نقطـةـ انـعـطـافـ المـنـحنـى C_g

2- الفروع الـلـانـهـائـية

2-تعريف

إذاـ آلتـ إـحـدـىـ إـحـدـاـتـيـيـ نقطـةـ منـ C ـ منـحنـىـ دـالـةـ إـلـىـ الـلـانـهـائـيـةـ فإنـاـ نـقـولـ إنـ C ـ يـقـبـلـ فـرـعاـ لـانـهـائـيـاـ.

إذا كان $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ فان المستقيم الذي معادلته $x = a$ مقارب لـ C_f

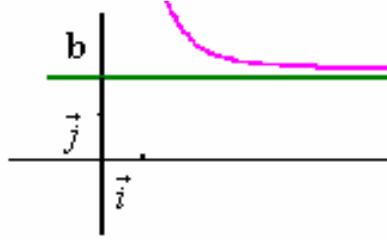
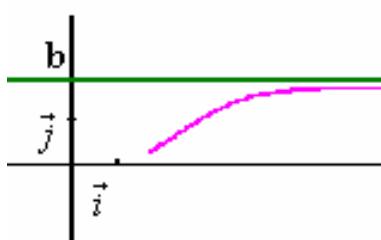


مثال $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

لدينا $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ و منه المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب عمودي لمنحنى

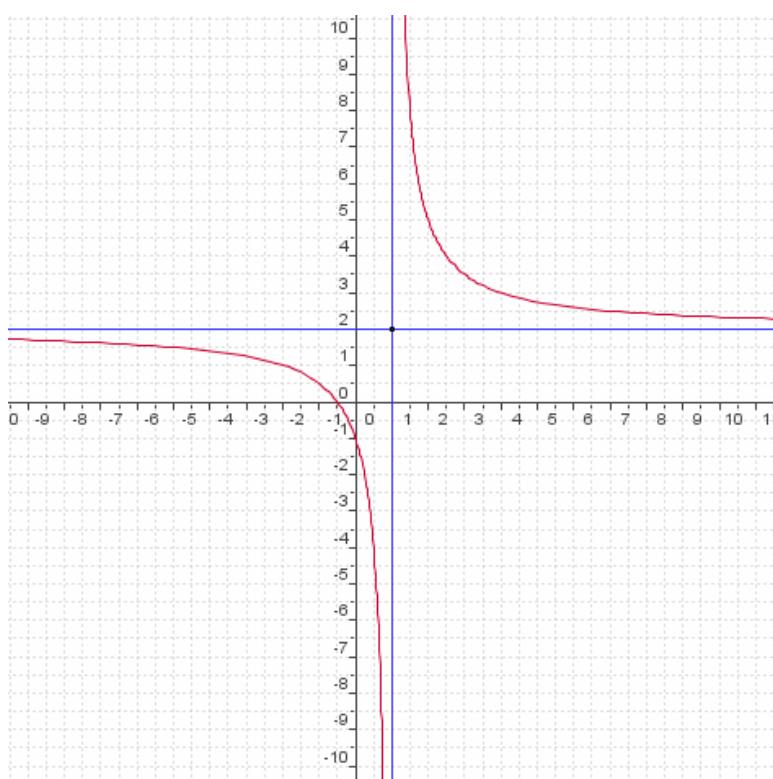
ب- المقارب الموازي لمحور الأفاسيل
تعريف

إذا كان $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$ فان المستقيم ذو المعادلة $y = b$ مقارب لـ C_f



مثال $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ و منه المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ مقارب أفقي لمنحنى



يكون المستقيم الذي معادلته $y = ax + b$ مقارب لـ C_f إذا وفقط إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$

خاصية
يكون المستقيم الذي معادلته $y = ax + b$ مقارب لـ C_f إذا وفقط إذا كانت توجد دالة h حيث يكون $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$ أو $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ و $f(x) = ax + b + h(x)$

مثال

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \quad f(x) = x - 2 - \frac{1}{x-1}$$

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x-1} = 0$ ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x - 2$ مقارب مائل لـ C_f (بجوار $+\infty$)

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x-1} = 0$ ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x - 2$ مقارب مائل لـ C_f (بجوار $-\infty$)

في كثير من الأحيان يصعب كتابة على شكل $f(x) = ax + b + h(x)$ حيث $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = 0$

تقنية تحديد مقارب مائل

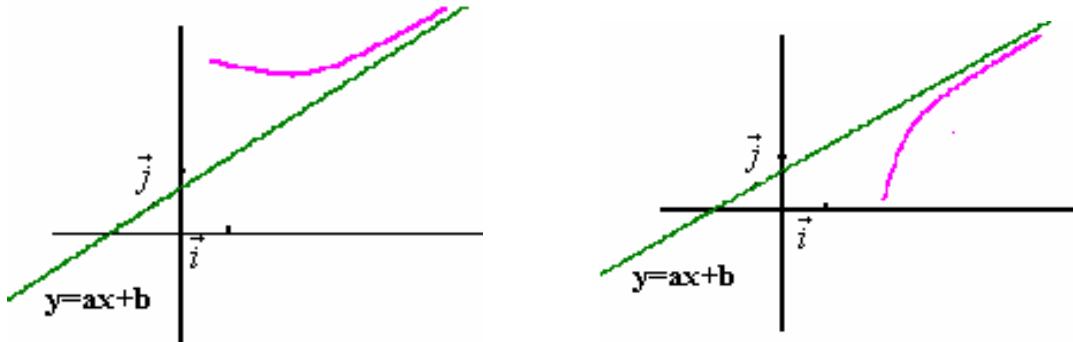
لنفترض أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ و $f(x) = ax + b + h(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (b + h(x)) = b \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(a + \frac{b}{x} + \frac{1}{x} h(x) \right) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \quad \text{فإن} \quad \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \right) \quad \text{عكسياً إذا كان}$$

يكون المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مقارب لـ C_f إذا وفقط إذا كان

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = b \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \right) \quad \text{أو} \quad \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \right)$$



ملاحظة دراسة إشارة $f(x) - (ax + b)$ تمكننا من معرفة وضع المنحنى C_f بالنسبة للمقارب المائل.

مثال

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + x - 2}$$

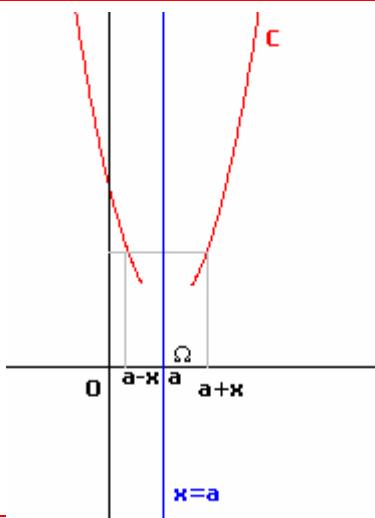
حدد المقارب المائل بـ $+\infty$ ثم بـ $-\infty$

أ - إذا كان $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ الأراتيب.

ب - إذا كان $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ الأفاصيل

ج - إذا كان $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ في اتجاه المستقيم ذا المعادلة $y = ax$ صفة عامة

إذا كان $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ كاتجاه مقارب.



3- مركز تماثل - محور تماثل
3- محور تماثل

إذا كان (C_f) يقبل المستقيم الذي معادلته $x = a$ كمحور تماثل

فهذا يعني أن معادلة (C_f) في المعلم $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$ حيث $\Omega(a; 0)$

هي على شكل $\begin{cases} X = x - a \\ Y = y \end{cases}$ حيث φ دالة زوجية و $Y = f(a + X) = \varphi(X)$

أي أن $\forall X \in D_\varphi \quad \varphi(-X) = \varphi(X)$

أي $\forall X \in D_\varphi \quad f(a - X) = f(a + X)$

$\forall x \in D_f \quad f(2a - x) = f(x)$ فان $X = x - a$ بما أن

خاصية

في معلم متعمد، يكون المستقيم الذي معادلته $x = a$ محور تماثل لمنحنى دالة f إذا وفقط إذا كان

$$\forall x \in D_f \quad (2a - x) \in D_f \quad ; \quad f(2a - x) = f(x)$$

2- مركز تماثل

إذا كان (C_f) يقبل النقطة $\Omega(a; b)$ كمركز تماثل

فهذا يعني أن معادلة (C_f) في المعلم $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$

هي على شكل $Y + b = f(a + X)$

أي $Y = f(a + X) - b = \varphi(X)$

حيث φ دالة فردية و $\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$

أي أن $\forall X \in D_\varphi \quad \varphi(-X) = -\varphi(X)$

$\forall X \in D_\varphi \quad f(a - X) - b = -f(a + X) + b$

أي $\forall X \in D_\varphi \quad f(a - X) = 2b - f(a + X)$

$\forall x \in D_f \quad f(2a - x) = 2b - f(x)$ فان $X = x - a$ بما أن

خاصية

في معلم ما، تكون النقطة $\Omega(a; b)$ مركز تماثل لدالة f إذا وفقط إذا كان

$$\forall x \in D_f \quad (2a - x) \in D_f \quad ; \quad f(2a - x) = 2b - f(x)$$

تمرين

$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$ (1) بين أن المحور تمثل للمنحنى (C_f) $x = 1$ بين أن المستقيم D تمثل للمنحنى (C_f)

$f(x) = \frac{x^2 - 2}{x - 1}$ (2) بين أن النقطة $(1; 2)$ مركز تمثل للمنحنى (C_f)

4- الدالة الدورية 1-4 تعريف

نقول أن f دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي T موجب قطعاً بحيث

$$\forall x \in D_f \quad x + T \in D_f ; \quad x - T \in D_f \quad f(x + T) = f(x)$$

العدد T يسمى دور الدالة f . أصغر دور موجب قطعاً يسمى دور الدالة f

أمثلة

* الدالتان $x \rightarrow \sin x$ و $x \rightarrow \cos x$ دورياتان و دورهما 2π

* الدالة $x \rightarrow \tan x$ دورها π

* الدالتان $x \rightarrow \sin ax$ و $x \rightarrow \cos ax$ (حيث $a \neq 0$) دورياتان و دورهما $\frac{2\pi}{|a|}$

* الدالة $x \rightarrow \tan ax$ (حيث $a \neq 0$) دورها $\frac{\pi}{|a|}$

تمرين

حدد دوراً للدوال $x \rightarrow \cos^2 x$ و $x \rightarrow \tan 3x$ و $x \rightarrow 3 - \cos \frac{1}{4}x$ و $x \rightarrow \cos x - \sin x$

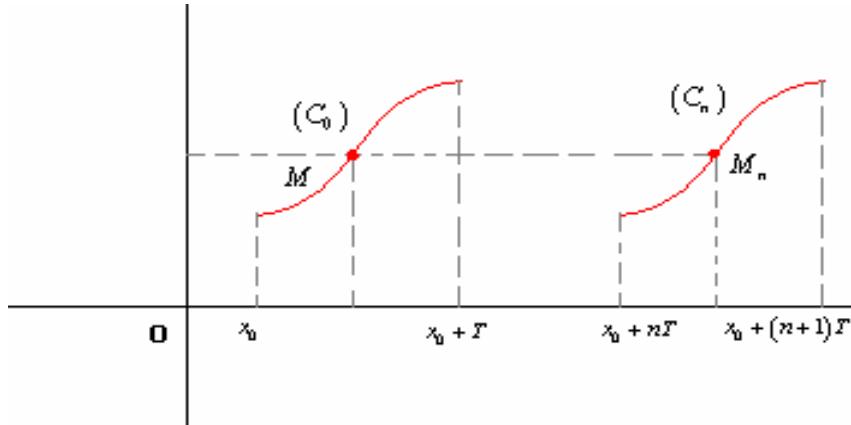
4- خاصية 2

إذا كانت للدالة f دور T فان

(نبين الخاصية بالاستدلال بالترجع)

3- التمثيل المباني لدالة دورية

لتكن f دورية دورها T و (C_f) منحناها في مستوى منسوب الى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$



منحنى الدالة f على $[x_0, x_0 + T]$ هو صورة منحنى الدالة على $D_f \cap [x_0, x_0 + T]$ بواسطة الإزاحة ذات المتجهة $\vec{i} \cdot nT$ حيث n عدد صحيح نسبي. ملاحظة:

لإنشاء منحنى دالة دورية يكفي إنشائه جزءه على مجال من نوع $I_0 = D_f \cap [x_0, x_0 + T]$ استنتاج المنحنى باستعمال الإزاحة t_{Thi}

أمثلة

* دالة $x \rightarrow \cos x$ دورية دورها 2π إذن يكفي دراستها على $[-\pi; \pi]$

و حيث أن $x \rightarrow \cos x$ زوجية فنقتصر دراستها على $[0; \pi]$

$$\forall x \in [0; \pi] \quad (\cos x)' = -\sin x$$

جدول التغيرات

x	0	π
$\cos x$	1	-1

هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

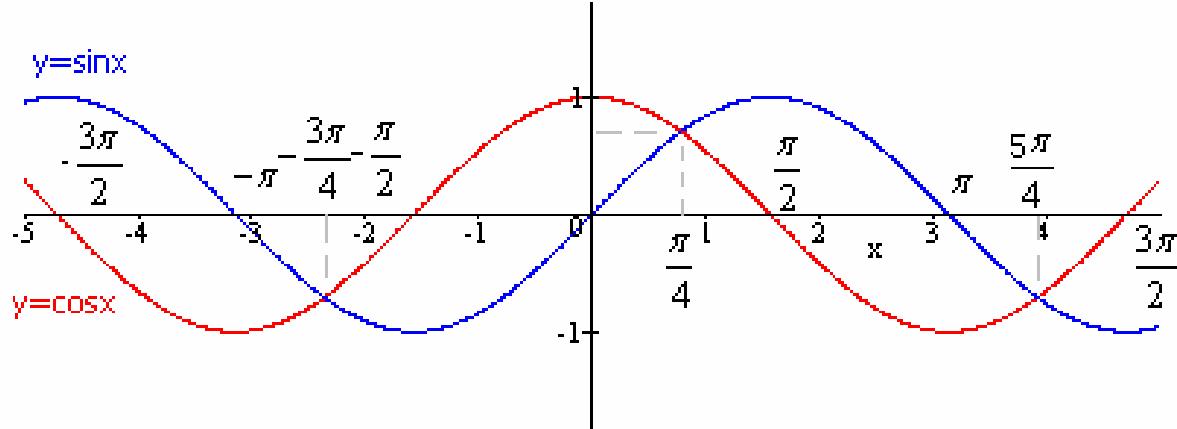
دالة $x \rightarrow \sin x$ دورية ودورها 2π إذن يكفي دراستها على $[-\pi; \pi]$

وحيث أن $x \rightarrow \sin x$ فردية فنقتصر دراستها على $[0; \pi]$

$$\forall x \in [0; \pi] \quad (\sin x)' = \cos x$$

جدول التغيرات

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	1	0



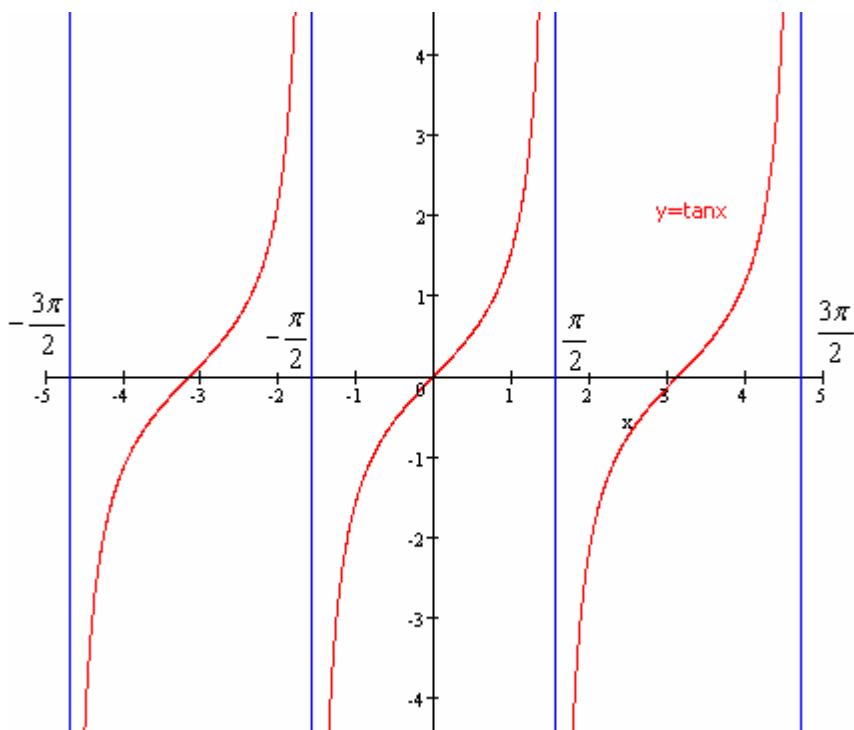
دالة $x \rightarrow \tan x$ دورية ودورها π إذن يكفي دراستها على $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ حيز تعريفها **

وحيث أن $x \rightarrow \tan x$ فردية زوجية فنقتصر دراستها على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad (\tan x)' = 1 + \tan^2 x$$

جدول التغيرات

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	0	$+\infty$



تصميم دراسة دالة

لدراسة دالة f في غالب الأحيان تتبع الخطوات التالية

- تحديد مجموعة التعريف ثم تحديد مجموعة الدراسة (خاصة إذا كانت f زوجية أو فردية أو دورية)
- دراسة الاتصال والاشتقاق و تحديد الدالة الاشتراق و دراسة إشارتها
- وضع جدول التغيرات
- دراسة الفروع الانهائية
- دراسة التعمق ان كان ذلك ضروريا و تحديد نقط انعطاف إن وجدت
- إنشاء المنحنى

تمرين

أدرس ومثل مبيانا الدالة f في الحالات التالية

$$c) : f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x \quad b) : f(x) = \frac{2|x|}{x^2 + 1} \quad a) : f(x) = x - 3 + \frac{1}{x-2}$$

تمارين و حلولها

تمرين 1

نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بـ:

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

-1) حدد D_f

ب) حدد $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ج) حدد $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

$$-2) \text{ بين أن } \forall x \in D_f \quad f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$$

ب) أدرس تغيرات f و أعط جدول تغيراتها

3- حدد معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأصول 0

4- بين أن النقطة $A(2; 1)$ مركز تمايل للمنحنى (C_f)

5- بين أن المستقيم ذا المعادلة $-1 - x = y$ مقاب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

6- أنشئ (C_f)

الجواب

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-2}$$

أ) نحدد D_f

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

ب) نحدد $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 + \frac{1}{x-2} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + \frac{1}{x-2} = +\infty$$

ج) حدد $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x - 1 + \frac{1}{x-2} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x - 1 + \frac{1}{x-2} = +\infty$$

هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

ومنه المستقيم ذا المعادلة $x = 2$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f)

$$\forall x \in D_f \quad f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{2\} \quad f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-2}$$

f دالة قابلة للاشتغال في كل نقطة من $\mathbb{R} - \{2\}$ لأن f دالة جذرية

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{2\} \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2 - 1}{(x-2)^2} = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$$

ب) ندرس تغيرات f و نعطي جدول تغيراتها

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(x-3)(x-1)$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	0
f	$-\infty$	$\nearrow -1$	$\searrow -\infty$	$\nearrow +\infty$	$3 \nearrow +\infty$

3- نحدد معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأصول 0

معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأصول 0 هي

$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$$

4- نبين أن النقطة $A(2;1)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f)

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{2\} \quad 4 - x \in \mathbb{R} - \{2\}$$

$$2 - f(x) = 2 - x + 1 - \frac{1}{x-2} = 3 - x + \frac{1}{2-x} ; \quad f(4-x) = 3 - x + \frac{1}{2-x}$$

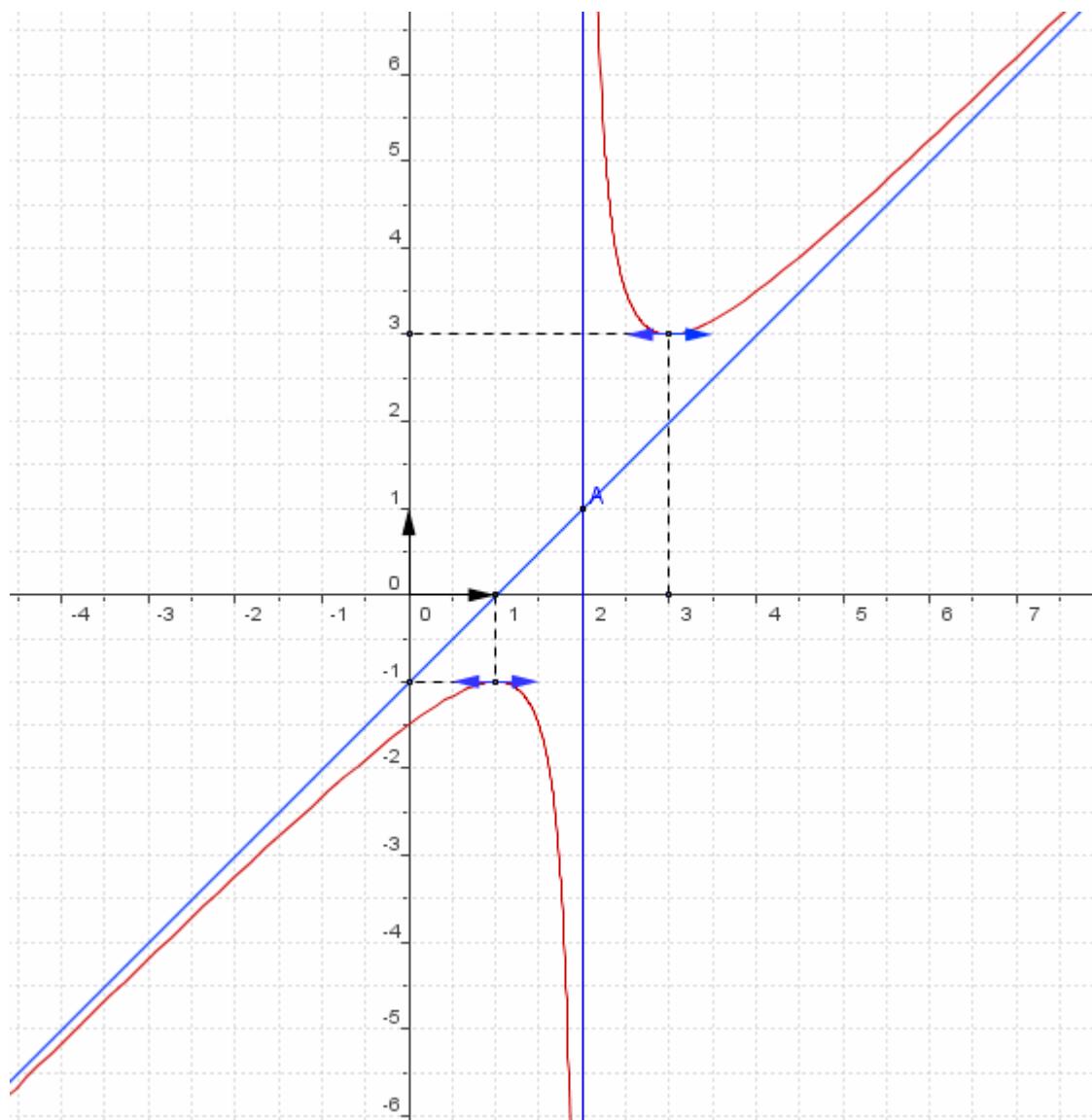
ومنه $f(4-x) = 2 - f(x)$ إذن $A(2;1)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f)

5- نبين أن المستقيم ذا المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-2} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

إذن المستقيم ذا المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

6- ننشئ (C_f)



تمرين 2

نعتبر الدالة العدیة f للمتغیر الحقیقی المعرفة بـ

1- حدد D_f و حدد نهایات f عند محدات D_f

2- حدد (f') لکل x من D_f

3- أدرس تغيرات f

4- أ- بين أن C_f يقبل $I\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ كنقطة انعطاف.

ب- بين أن C_f ينتمي لـ $I\left(\frac{1}{2}; 1\right)$

د- حدد معادلة المماس لـ C_f عند النقطة I

5- أ- أدرس الفروع الالانهائية

ب- أنشئ المنحنى C_f

الجواب

$$f(x) = 1 + \frac{1-2x}{x^2 - x - 2}$$

2- نحدد D_f و نحدد نهایات f عند محدات D_f

ليکن $x \in \mathbb{R}$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \quad \text{et} \quad x \neq 2$$

$$D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-2x}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2}{x} = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 + \frac{1-2x}{x^2 - x - 2} = 1$										
$\lim_{x \rightarrow 2} 1-2x = -3$ $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - x - 2 = 0$ لدينا										
<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>-1</td> <td>2</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> <td>0 +</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	$f(x)$	+	0	-	0 +
x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$						
$f(x)$	+	0	-	0 +						

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 1 + \frac{1-2x}{x^2 - x - 2} = +\infty \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 + \frac{1-2x}{x^2 - x - 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} 1-2x = 3 \quad \lim_{x \rightarrow -1} x^2 - x - 2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} 1 + \frac{1-2x}{x^2 - x - 2} = +\infty \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 1 + \frac{1-2x}{x^2 - x - 2} = -\infty$$

-2 - نحدد $f'(x)$ لـ x من

$$f'(x) = \frac{(1-2x)'(x^2 - x - 2) - (x^2 - x - 2)'(1-2x)}{(x^2 - x - 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2(x^2 - x - 2) - (2x-1)(1-2x)}{(x^2 - x - 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 2x + 4 + 4x^2 - 4x + 1}{(x^2 - x - 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2x + 5}{(x^2 - x - 2)^2}$$

-3 - ندرس تغيرات f

$$\forall x \in D_f \quad f'(x) = \frac{2x^2 - 2x + 5}{(x^2 - x - 2)^2}$$

إشاره $f'(x)$ هي إشاره

$$\Delta = 4 - 40 = -36$$

اذن $0 < x^2 - x - 2 < 0$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+	+
f	↗ 1	↗ +∞	↗ +∞	↗ 1

-4 - نبين أن C_f يقبل $I\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ نقطة انعطاف.

$$\forall x \in D_f \quad f''(x) = \frac{-2(2x-1)(x^2-x+7)}{(x^2-x-2)^3}$$

$f''(x)$ تندم في $\frac{1}{2}$ مع تغيير الإشارة إذن C_f يقبل $I\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ كنقطة انعطاف

ب- نبين أن $I\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ مركز تماثل لـ C_f

$$\forall x \in D_f \quad 1-x \in D_f$$

$$f(1-x) = 1 + \frac{1-2(1-x)}{(1-x)^2 - (1-x) - 2} = 1 - \frac{1-2x}{x^2 - x - 2}$$

$$2-f(x) = 2 - 1 - \frac{1-2x}{x^2 - x - 2} = 1 - \frac{1-2x}{x^2 - x - 2}$$

$$\text{إذن } C_f \text{ مركز تماثل لـ } I\left(\frac{1}{2}; 1\right) \text{ ومنه } f(1-x) = 2-f(x)$$

د- نحدد معادلة المماس لـ C_f عند النقطة I

$$y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1 \quad \text{معادلة المماس لـ } C_f \text{ عند النقطة } I \text{ هي}$$

$$y = \frac{8}{9}x + \frac{5}{9} \quad \text{ومنه } y = \frac{8}{9}\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1$$

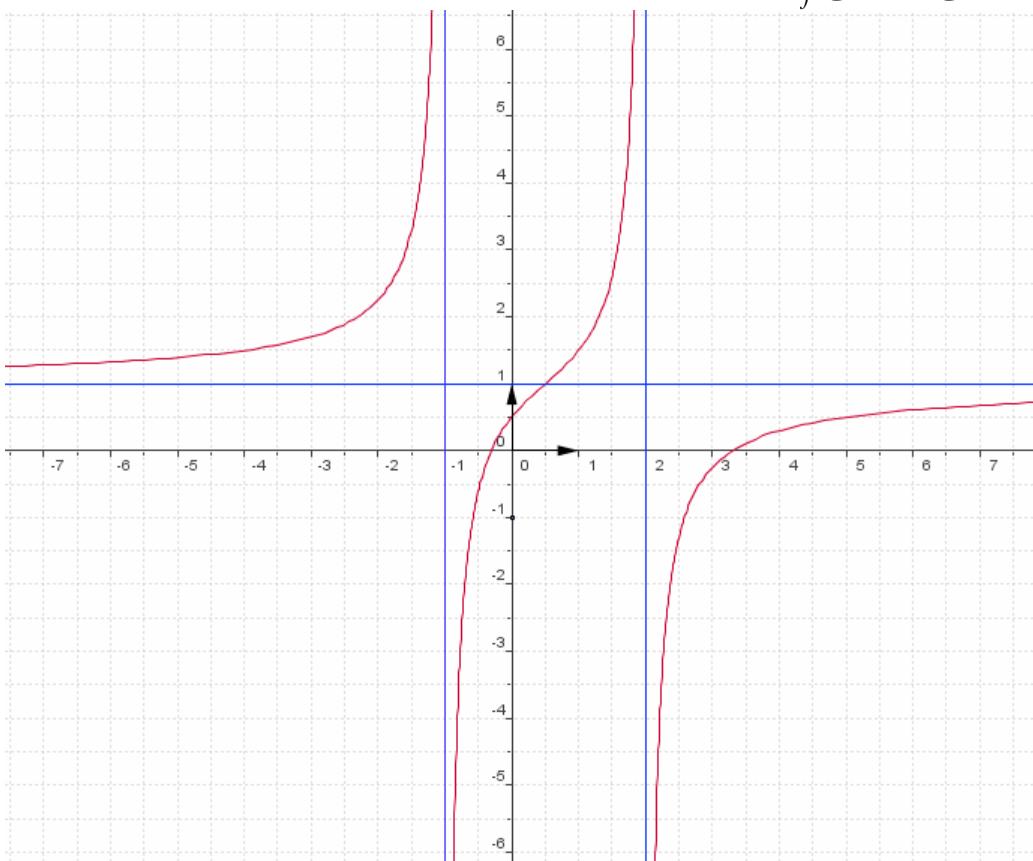
أ- ندرس الفروع اللاحئائية

$$\text{لدينا } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1 \quad \text{ومنه المستقيم ذا المعادلة } y = 1 \text{ مقارب أفقي للمنحنى } C_f$$

$$\text{لدينا } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \quad \text{ومنه المستقيم ذا المعادلة } x = 2 \text{ مقارب عمودي للمنحنى } C_f$$

$$\text{لدينا } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \quad \text{ومنه المستقيم ذا المعادلة } x = -1 \text{ مقارب عمودي للمنحنى } C_f$$

ب- ننشئ المنحنى C_f



$$f(x) = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$$

نعتبر الدالة العدية f للمتغير الحقيقي المعرفة بـ

-1 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و D_f

-2 أ- بين أن f دالة دورية و حدد دورها

ب تأكيد أن f زوجية استنتج D_E مجموعة دراسة f

-3 أدرس تغيرات f على D_E

-4 أنشئ المنحنى C_f

الجواب

$$f(x) = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$$

-5 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و D_f

ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$x \in D_f \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$$

اذن $D_f = \mathbb{R} - \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

-6 أ- نبين أن f دالة دورية و حدد دورها

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \quad 2\pi + x \in \mathbb{R} - \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \quad x - 2\pi \in \mathbb{R} - \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

اذن f دالة دورية و حدد دورها 2π

$$f(x + 2\pi) = \frac{1 + \cos(x + 2\pi)}{1 - \cos(x + 2\pi)} = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = f(x)$$

ب- تأكيد أن f زوجية نستنتج D_E مجموعة دراسة f

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \quad -x \in \mathbb{R} - \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

$D_E =]0; \pi]$ ومنه

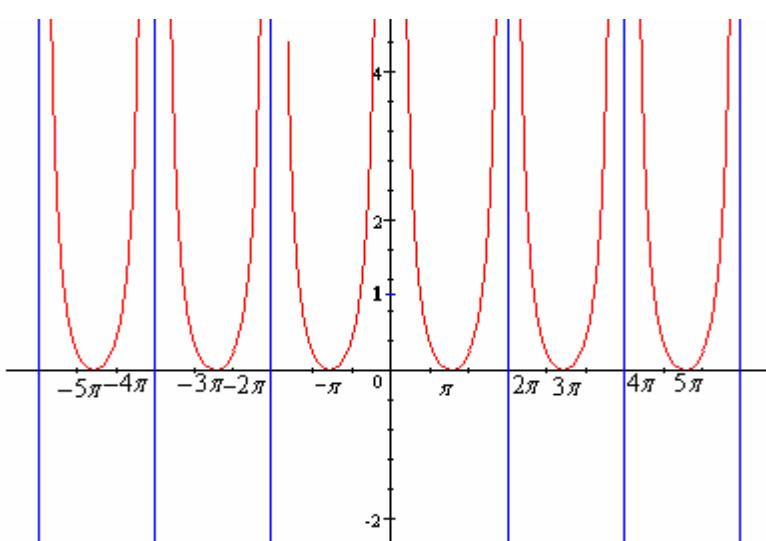
اذن f زوجية $f(-x) = \frac{1 + \cos(-x)}{1 - \cos(-x)} = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = f(x)$

-7 ندرس تغيرات f على D_E

$$\forall x \in]0; \pi] \quad f'(x) = \frac{(-\sin x)(1 - \cos x) - (1 + \cos x)\sin x}{(1 - \cos x)^2} = \frac{-2\sin x}{(1 - \cos x)^2}$$

x	0	π
$f'(x)$	-	0
$f(x)$	$+\infty$	0

-8 أنشئ المنحنى C_f



نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بـ: $f(x) = \frac{1-\cos x}{\sin x}$ لikan (C_f) منحنى الدالة f في مستوى منسوب إلى معلم متعمد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ -1 أ) حدد D_f

ب) بين أن f دالة فردية
د) بين أن f دورية دورها 2π
ج) بين $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = 0$ ثم حدد $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ مع تأويل النتيجة هندسيا

-2 أ) بين أن $\forall x \in]0; \pi[\quad f'(x) = \frac{1}{1+\cos x}$

ب) أدرس تغيرات f على $[0; \pi]$ و أعط جدول تغيراتها

-3 أ) حدد تغير (C_f)

ب) أنشئ (C_f)

الجواب

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{\sin x}$$

-2 أ) نحدد D_f

$$D_f = \mathbb{R} - \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

ب) نبين أن f دالة فردية

$-x \in \mathbb{R} - \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$: $\forall x \in \mathbb{R} - \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ لدينا

$$f(-x) = \frac{1-\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{1-\cos x}{-\sin x} = -\frac{1-\cos x}{\sin x} = -f(x)$$

إذن f دالة فردية

د) نبين أن f دورية دورها 2π

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \quad x + 2\pi \in \mathbb{R} - \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

$$f(x + 2\pi) = \frac{1-\cos(x + 2\pi)}{\sin(x + 2\pi)} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = f(x)$$

f دورية دورها 2π

ملاحظة: بما أن f دورية دورها 2π و f دالة فردية فإن مجموعة الدراسة هي $[0; \pi]$

ج) نبين $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = 0$ ثم نحدد $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ مع تأويل النتيجة هندسيا

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-\cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \frac{\frac{1-\cos x}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = 0 \times \frac{1}{1} = 0$$

(C_f) ومنه المستقيم ذا المعادلة $x = \pi$ مقارب للمنحنى $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{1-\cos x}{\sin x} = +\infty$

-2 أ) نبين أن $\forall x \in]0; \pi[\quad f'(x) = \frac{1}{1+\cos x}$

$$\forall x \in]0; \pi[\quad f'(x) = \frac{\sin^2 x - (1-\cos x)\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} = \frac{1}{1+\cos x}$$

ب) ندرس تغيرات f على $[0; \pi]$ و نعطي جدول تغيراتها

$$\forall x \in]0; \pi[\quad 1 + \cos x > 0 \quad \forall x \in]0; \pi[\quad f'(x) > 0$$

ومنه f تزايدية على $]0; \pi[$

x	0	π
f	0	$\rightarrow +\infty$

أ) نحدد تغير (C_f) -3

$$\forall x \in]0; \pi[\quad f'(x) = \frac{1}{1 + \cos x}$$

$$\forall x \in]0; \pi[\quad f''(x) = \frac{\sin x}{(1 + \cos x)^2}$$

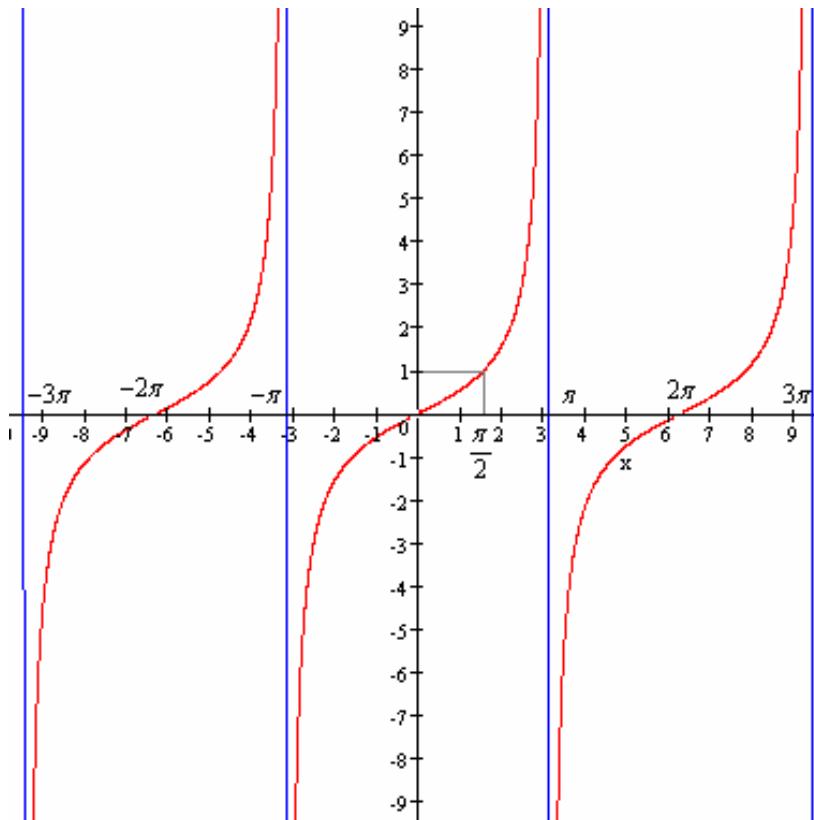
x	0	π
$f''(x)$		+

إذن (C_f) محدب على $[-\pi; 0]$ و حيث f فردية فان (C_f) مقعر على $[0; \pi]$

وبما أن f دورية دورها 2π فان (C_f) محدب على كل مجال من شكل $[2k\pi; \pi + 2k\pi]$ و مقعر على

$$k \in \mathbb{Z} \quad]-\pi + 2k\pi; 2k\pi[$$

ب) ننشئ (C_f)



تمارين و حلول

تمرين 1

نعتبر الدالة العدية f للمتغير الحقيقي المعرفة بـ

$$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{1-x^2} & |x| \leq 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2+1} & |x| > 1 \end{cases}$$

- 1 أ) أدرس اتصال في النقطتين 1 و -1
 ب) أدرس اشتقاق f في النقطتين 1 و -1 و أول النتائج هندسيا
- 2 أ) أحسب $f'(x)$ لكل x من $[-1; 1] \cup [1; +\infty)$ ثم أحسب $f'(x)$ لكل x من $[-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

ب) أدرس تغيرات f أدرس الفروع الانهائية لـ C_f ثم الوضع النسبي لـ C_f و مقاربه.

-3 أدرس تغيرات C_f

-4 أنشئ C_f

الجواب

$$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{1-x^2} & |x| \leq 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2+1} & |x| > 1 \end{cases}$$

-4 أ) ندرس اتصال في النقطتين 1 و -1

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2+1} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x - \sqrt{1-x^2} = 1$$

ومنه f متصلة في 1 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2+1} = -1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x - \sqrt{1-x^2} = -1$$

ومنه f متصلة في -1 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1)$

ب) ندرس اشتقاق f في النقطتين 1 و -1 و نؤول النتائج هندسيا

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - \sqrt{1-x^2} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 + \frac{\sqrt{1-x}}{1-x} \sqrt{x+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 + \sqrt{\frac{1}{1-x}} \sqrt{x+1} = +\infty$$

ومنه f لا تقبل الاشتقاق على يسار 1 و منحنى f يقبل نصف مماس عمودي على يسار 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2+1} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{2} + \frac{x^2+1}{x-1} - \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{2} + \frac{-x+1}{2(x^2+1)} = \frac{1}{2}$$

ومنه f تقبل الاشتقاق على يمين 1 و منحنى f يقبل نصف مماس معامله الموجة $\frac{1}{2}$ على يمين 1

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x - \sqrt{1-x^2} + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} 1 - \frac{\sqrt{x+1}}{x+1} \sqrt{1-x} = \lim_{x \rightarrow -1^+} 1 - \sqrt{\frac{1}{1+x}} \sqrt{1-x} = -\infty$$

ومنه f لا تقبل الاشتقاق على يمين -1 و منحنى f يقبل نصف مماس عمودي على يمين -1

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2+1} + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{2} + \frac{x^2+1}{x+1} + \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{2} + \frac{x+1}{2(x^2+1)} = \frac{1}{2}$$

ومنه f تقبل الاشتقاق على يسار -1 و منحنى f يقبل نصف مماس معامله الموجة $\frac{1}{2}$ على يسار -1

هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

-5 أ) نحسب $f'(x)$ لكل x من $]_{-\infty}^{\infty}$ ثم أحسب $f'(x)$ لكل x من $]-1; 1[$

$$\forall x \in]-1; 1[\quad f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\forall x \in]_{-\infty}^{\infty} \cup]1; +\infty[\quad f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{x^2 + 1} = \frac{2}{2(x^2 + 1)} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

ب) ندرس تغيرات f

$$\forall x \in]-1; 1[\quad f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{(\sqrt{1-x^2}-x)\sqrt{1-x^2}}$$

$$\forall x \in [0; 1[\quad f'(x) > 0$$

$$\forall x \in]-1; 1[\quad f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{(\sqrt{1-x^2}-x)\sqrt{1-x^2}}$$

إشارة $f'(x)$ على $]-1; 0[$ هي إشارة $-2x^2 - 1$ على $]$

$$x \in]-1; 0[\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\forall x \in \left] -1; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right] \quad f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \left] -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0 \right[\quad f'(x) > 0 \quad \text{ومنه}$$

$$\forall x \in]_{-\infty}^{\infty} \cup]1; +\infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{ومنه} \quad \forall x \in]_{-\infty}^{\infty} \cup]1; +\infty[\quad f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	0	+	+
f	$-\infty$	-1	$-\sqrt{2}$	1	$+\infty$

6- ندرس الفروع اللانهائية لـ C_f ثم الوضع النسبي لـ C_f و مقاربه.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2 + 1} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2 + 1} = +\infty$$

لدينا $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ مقارب للمنحنى

$$\forall x \in]_{-\infty}^{\infty} \cup]1; +\infty[\quad f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{x}{x^2 + 1}$$

و منه C_f فوق (D) على $]1; +\infty[$ و C_f تحت (D) على $]-\infty; -1[$

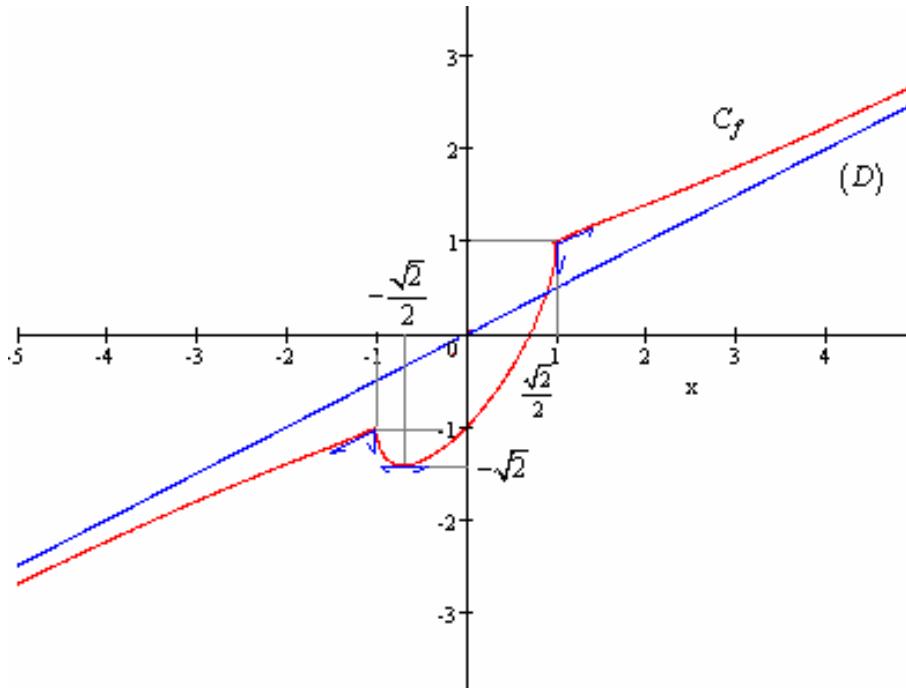
-5 ندرس تغير C_f

$$\forall x \in]-1; 1[\quad f''(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} > 0$$

$$\forall x \in]_{-\infty}^{\infty} \cup]1; +\infty[\quad f''(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in]1; +\infty[& \text{ أي } C_f \text{ مقعر على }]1; +\infty[& f''(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} < 0 \\ \forall x \in]-\infty; -1[& \text{ أي } C_f \text{ محدب على }]-\infty; -1[& f''(x) > 0 \\ C_f & \text{ نشئ} \end{aligned}$$

6



تمرين 2

نعتبر الدالة العدیة f للمتغیر الحقیقی المعرفة بـ

- 1- حدد D_f حیز تعريف الدالة f
- 2- أ- بين أن 2π دور للدالة f
- 3- أحسب $f'(x)$
- 4- أدرس تغيرات f على $[0; \pi] \cap D_f$
- 5- أنشئ منحنی قصور الدالة f على $[0; 2\pi] \cap D_f$

الجواب

$$f(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$$

- 3- نحدد D_f
 $x \in \mathbb{R}$ لكن

$$x \in D_f \Leftrightarrow \sin x \neq 0 \quad \text{et} \quad \cos x \neq 0$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow \left(x \neq k\pi \quad \text{et} \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \quad / k \in \mathbb{Z}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} \quad / k \in \mathbb{Z}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ k \frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

اذن f دوري للدالة 2π دوري -4

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ k \frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad x \in \mathbb{R} - \left\{ k \frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$f(x + 2\pi) = \frac{1}{\sin(x + 2\pi)} + \frac{1}{\cos(x + 2\pi)} = f(x)$$

اذن 2π دوري للدالة

ب- نبين أن $f(x + \pi) = -f(x)$

$$\forall x \in D_f \quad f(x + \pi) = \frac{1}{\sin(x + \pi)} + \frac{1}{\cos(x + \pi)} = \frac{1}{-\sin x} + \frac{1}{-\cos x} = -f(x)$$

حسب $f'(x)$ -3

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{(\sin x - \cos x)(1 + \cos x \cdot \sin x)}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{(\sin x - \cos x)\left(1 + \frac{\sin 2x}{2}\right)}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$$

4- ندرس تغيرات f على $[0; \pi] \cap D_f$
إشاره $f'(x)$ هي إشاره

$$x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \quad \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$	-	0	+	+
f	$+\infty \rightarrow 2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2} \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow +\infty$	$+\infty$

5- ننشئ منحنى قصور الدالة f على $[0; 2\pi] \cap D_f$

$$C_f \quad \text{ومنه المستقيم ذا المعادلة } x = \pi \text{ مقارب للمنحنى} \quad \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = +\infty$$

$$C_f \quad \text{ومنه المستقيم ذا المعادلة } x = \frac{\pi}{2} \text{ مقارب للمنحنى} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$$

$$C_f \quad \text{ومنه المستقيم ذا المعادلة } x = 0 \text{ مقارب للمنحنى} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$f(x + \pi) = -f(x)$ حيث $\left] \pi; \frac{3\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right[$ و نستنتج الجزء الآخر على $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$ ننشئ C_f على

