

الاشتقاق ودراسة الدوال

1) اشتقاق دالة في عدد : تعاريف و تأويلات هندسية

(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a, f(a))$ معامله الموجه $l = f'(a)$ و معادلته : $y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$	$\leftrightarrow$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \in \mathbb{R}$ $l = f'(a)$	$\leftrightarrow$	f قابلة للاشتقاق في a
(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a, f(a))$ معامله الموجه $l = f'_d(a)$ و معادلته : $y = f'_d(a) \cdot (x - a) + f(a)$	$\leftrightarrow$	$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \in \mathbb{R}$ $l = f'_d(a)$	$\leftrightarrow$	f قابلة للاشتقاق في a على اليمين
(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a, f(a))$ معامله الموجه $l = f'_g(a)$ و معادلته : $y = f'_g(a) \cdot (x - a) + f(a)$	$\leftrightarrow$	$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \in \mathbb{R}$ $l = f'_g(a)$	$\leftrightarrow$	f قابلة للاشتقاق في a على اليسار
(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a, f(a))$ معامله الموجه $l = f'(a)$ و معادلته : $y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$	$\leftrightarrow$	f قابلة للاشتقاق في a على اليمين $\checkmark$ f قابلة للاشتقاق في a على اليسار $\checkmark$ $f'_d(a) = f'_g(a) = f'(a)$ $\checkmark$	$\leftrightarrow$	f قابلة للاشتقاق في a

- إذا كانت f قابلة للاشتقاق في a على اليمين و f قابلة للاشتقاق في a على اليسار و $f'_d(a) \neq f'_g(a)$ فإن f غير قابلة للاشتقاق في a . في هذه الحالة (C_f) يقبل نصفي مماس مختلفان في النقطة $A(a, f(a))$ معاملاهما الموجهان $f'_d(a)$ و $f'_g(a)$ و النقطة $A(a, f(a))$ تسمى نقطة مزواة

- إذا كانت $f'(a) = 0$ فإن (C_f) يقبل مماس أفقي في $A(a, f(a))$

$f \text{ غير قابلة للاشتقاق في } a \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ على اليسار (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(a, f(a))$	$f \text{ غير قابلة للاشتقاق في } a \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ على اليمين (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(a, f(a))$
$f \text{ غير قابلة للاشتقاق في } a \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ على اليسار (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(a, f(a))$	$f \text{ غير قابلة للاشتقاق في } a \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ على اليمين (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(a, f(a))$

(2) اشتقاق دالة على مجال

خاصيات

✓ إذا كانت f و g قابلتين للاشتقاق على I و $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن αf و $f + g$ و $f \times g$ قابلة للاشتقاق على I
✓ بالإضافة إذا كانت $g \neq 0$ على I فإن $\frac{f}{g}$ قابلة للاشتقاق على I
✓ إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I و g قابلة للاشتقاق على I فإن $f \circ g$ قابلة للاشتقاق على I
✓ إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I و $f \geq 0$ على I فإن $\sqrt{f}$ قابلة للاشتقاق على I
✓ إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I فإن f^n ($n \in \mathbb{N}$) قابلة للاشتقاق على I

الدالة المشتقة	الدالة
$\alpha f'$	αf
$f' + g'$	$f + g$
$f' \times g + f \times g'$	$f \times g$
$-\frac{g'}{g^2}$	$\frac{1}{g}$
$\frac{f'g - fg'}{g^2}$	$\frac{f}{g}$
$f' \times g' \circ f$	$g \circ f$
$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	$\sqrt{f}$
$nf' f^{n-1}$	f^n
$\frac{U'}{U}$	$\ln U $
$U' e^U$	e^U

$\frac{U'}{1+U^2}$	$Arc \tan(U)$
--------------------	---------------

❖ مشتقات الدوال الاعتيادية

المجال I	الدالة المشتقة f'	الدالة f
$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	$x \mapsto k$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$
$I =]-\infty, 0[$ أو $I =]0, +\infty[$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\}$
$I =]0, +\infty[$	$x \mapsto rx^{r-1}$	$x \mapsto x^r \quad r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$
$I =]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \mapsto \sqrt{x}$
$I =]-\infty, 0[$ أو $I =]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{-1}{x^2}$	$x \mapsto \frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin x$	$x \mapsto \cos x$
$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$	$x \mapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x$
$I =]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln x$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto Arc \tan(x)$

خاصية : مشتقة الدالة العكسية :

لتكن f دالة معرفة على مجال I تقبل دالة عكسية f^{-1} وليكن x_0 و y_0 عدنان بحيث : $f^{-1}(x_0) = y_0$

إذا كانت $f'(y_0) \neq 0$ فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق في x_0 ولدينا $(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)}$

إذا كانت f' لا تنعدم على I فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق على $f(I)$ ولدينا :

$$(\forall x \in f(I)) \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

رتابة دالة

- ✓ إذا كانت $\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$ فإن f تزايدية على I
- ✓ إذا كانت $\forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$ فإن f تناقصية على I
- ✓ إذا كانت $\forall x \in I \quad f'(x) > 0$ فإن f تزايدية قطعاً على I
- ✓ إذا كانت $\forall x \in I \quad f'(x) < 0$ فإن f تناقصية قطعاً على I

خاصية

- ✓ إذا كانت $\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$ وكانت f' تنعدم في عدد منته من النقط على I فإن f تزايدية قطعاً على I
- ✓ إذا كانت $\forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$ وكانت f' تنعدم في عدد منته من النقط على I فإن f تناقصية قطعاً على I

(3) دالة الجذر من الرتبة n ($n \in \mathbb{N}^*$)

أ. تعريف :

ليكن n من $\mathbb{N}^*$
الدالة العكسية للدالة $x \mapsto x^n$ على المجال $[0, +\infty[$ تسمى دالة الجذر من الرتبة n ونرمز لها بـ : $x \mapsto \sqrt[n]{x}$
الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ متصلة و تزايدية قطعاً على $[0, +\infty[$

ب. خصائص :

ليكن x و y عدداً حقيقيين موجبان. لدينا :

$$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n]{x}^m \quad \sqrt[n]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n]{x} \quad \sqrt[n]{x^n} = x \quad (\sqrt[n]{x})^n = x$$

$$(y \neq 0) \quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \quad \sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$$

ج. خاصية :

لتكن f دالة و $n \in \mathbb{N}^*$

- إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ فإن : $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$
- إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ و $l \geq 0$ فإن : $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$
- إذا كانت f متصلة و موجبة على مجال I فإن $\sqrt[n]{f}$ متصلة على I

د. القوى الجذرية لعدد حقيقي:

ليكن n و m من $\mathbb{N}^*$ و $x > 0$ لدينا :

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} \quad \text{و} \quad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

لكل عددين حقيقيين موجبين قطعا x و y ولكل r و r' من $\mathbb{Q}^*$:

$$\begin{aligned} (x^r)^{r'} &= x^{r \cdot r'} & x^r \cdot y^r &= (x \cdot y)^r & x^{r+r'} &= x^r \cdot x^{r'} \\ \frac{x^r}{x^{r'}} &= x^{r-r'} & \frac{x^r}{y^r} &= \left(\frac{x}{y}\right)^r & \frac{1}{x^r} &= x^{-r} \end{aligned}$$

خاصية

❖ الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ و لدينا : $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x}^{n-1}}$ $(\forall x \in]0, +\infty[)$

❖ إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I بحيث : $f(x) > 0$ $(\forall x \in I)$ فإن الدالة $\sqrt[n]{f}$ قابلة للاشتقاق على I و

لدينا : $(\sqrt[n]{f})' = \frac{f'}{n\sqrt[n]{f}^{n-1}}$

(4) دالة قوس الظل

تعريف

الدالة $f : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$ متصلة و تزايدية قطعا على $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ إذن f تقبل دالة عكسية f^{-1}

$$x \mapsto \tan x$$

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\rightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\\ x &\mapsto \text{Arc tan } x \end{aligned}$$

الدالة Arc tan تسمى دالة قوس الظل

نتائج

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \left(\forall y \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\right) \quad y = \text{Arc tan } x \Leftrightarrow x = \tan y$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) \quad \text{Arc tan } x < \text{Arc tan } y \Leftrightarrow x < y$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \tan(\text{Arc tan}(x)) = x$$

$$\left(\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\right) \quad \text{Arc tan}(\tan(x)) = x$$

الدالة Arc tan دالة فردية

خاصية

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \text{Arc tan}'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{و لدينا } \mathbb{R} \text{ قابلة للاشتقاق على}$$

❖ إذا كانت U دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $\text{Arc tan}(U)$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا :

$$(\text{Arc tan}(U))' = \frac{U'}{1+U^2}$$