

| السنة 2 بكالوريا علوم رياضية                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | النهايات والاتصال<br>حل مقترح | سلسلة 3 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|---------|
| <p><b>تمرين 1 :</b> <math>f(x) = \frac{\sqrt{x+8}}{x-1} + \frac{6 x }{1-x^2}</math></p> <p>(1) لدينا : <math>x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ 1-x^2 \neq 0 \\ x+8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ (1-x)(1+x) \neq 0 \\ x \geq -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \\ x \geq -8 \end{cases}</math> : <math>D_f = [-8; -1[ \cup ]-1; 1[ \cup ]1; +\infty[</math> منه</p> <p>(2) لدينا : <math>\forall x &gt; 1 \quad f(x) = \frac{\sqrt{x+8}}{(x-1)^2} + \frac{6x}{1-x^2}</math></p> <p>وبما أن : <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+8}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0</math> و <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6}{x} = 0</math></p> <p>فإن : <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{0} + 0 = 0</math></p> <p>هناك طرق أخرى، لكن يجب تعلم أبسط الطرق الممكنة وفق النهاية المطلوب حسابها</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\sqrt{8}</math></p> <p>نهاية بسيطة أدرجت بهدف التذكير بضرورة التعويض قبل أي محاولة أخرى</p> <p>نعلم أن <math>1-x^2</math> سالبة في المجال <math>]-1; 1[</math> وموجبة خارجه</p> <p>وحيث أن : <math>\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+8}}{x-1} = \frac{-\sqrt{7}}{2}</math> و <math>\lim_{x \rightarrow -1} 6 x  = 6</math> فإن : <math>\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty</math> و <math>\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty</math></p> <p>التعويض بالمرور <math>0^+</math> و <math>0^-</math> و <math>+\infty</math> و <math>-\infty</math> لانصح باستعمالها في الأجوبة خصوصا في الامتحان الوطني بل التعليل بمثل الطريقة أعلاه، لأنه مثلا الكتابة <math>\frac{6}{0^-}</math> لا معنى لها رياضيا إنما هي طريقة لشرح الجواب وليست جوابا بحد ذاته.</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}}{x-1} + \frac{6x}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} + \frac{3}{x-1} - \frac{6x}{x^2-1}</math></p> <p><math>= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} + \frac{3x+3-6x}{x^2-1}</math></p> <p><math>= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+8}+3} + \frac{3-3x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+8}+3} + \frac{-3}{x+1}</math></p> <p><math>= \frac{1}{6} - \frac{3}{2} = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3}</math></p> <p>(3) لدينا : <math> x  = x \quad \forall x \in ]0; 2[</math> ، إذن :</p> <p>إذن <math>f</math> تقبل تمديدا بالاتصال في 1</p> <p>يمكننا دائما عند حساب نهاية دالة في عدد <math>x_0</math> وعند الحاجة تعويض الدالة بقصورها في المجال <math>]x_0 - a; x_0 + b[</math> حيث <math>a &gt; 0; b &gt; 0</math></p> |                               |         |
| <p><b>تمرين 2 :</b></p> <p>(1) نعتبر الدالة : <math>f(x) = x^3 + x + 1</math></p> <p>لدينا <math>f(0) = 1 &gt; 0</math> و <math>f(-1) = -1 &lt; 0</math> و <math>f</math> متصلة على <math>[-1; 0]</math> إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة نستنتج أن <math>x^3 + x + 1 = 0</math> تقبل على الأقل حلا في <math>[-1; 0]</math> ومنه في <math>IR</math></p> <p>(2) نعتبر الدالة : <math>g(x) = x^3 + ax + b</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                               |         |

نعلم أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  إذن حسب التعريف :  $\forall A > 0 \exists x_0 \in \mathbb{R} ; x \geq x_0 \Rightarrow g(x) > A$

نأخذ  $A = 1$  إذن :  $\exists x_1 \in \mathbb{R} ; x \geq x_1 \Rightarrow g(x) > 1$  منه :  $\exists x_1 \in \mathbb{R} g(x_1) > 1 > 0$

ونعلم أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$  إذن حسب التعريف :  $\forall A < 0 \exists x_0 \in \mathbb{R} ; x \leq x_0 \Rightarrow g(x) < A$

نأخذ  $A = -1$  إذن :  $\exists x_2 \in \mathbb{R} ; x \leq x_2 \Rightarrow g(x) < -1$  منه :  $\exists x_2 \in \mathbb{R} g(x_2) < -1 < 0$

نضع :  $a = \min(x_1; x_2)$  و  $b = \max(x_1; x_2)$

الآن لدينا  $f(x_1) > 0$  و  $f(x_2) < 0$  منه :  $f(a).f(b) < 0$  و  $f$  متصلة على  $[a; b]$  إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة فالمعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا على الأقل في  $[a; b]$  منه في  $\mathbb{R}$

هناك طريقتان أخريتان على الأقل لحل التمرين أولا هما تعتمد على البرهان بالخلف مثل التمرين 6 من السلسلة 2 والثانية تعتمد على دراسة تغيرات الدالة حسب قيم البارامتر  $a$ .

**تمرين 3 :**  $f(x) = \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{x^2 - a^2}$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{x^2 - a^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{(x\sqrt{x} + a\sqrt{a})(x^2 - a^2)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + ax + a^2}{(x\sqrt{x} + a\sqrt{a})(x + a)}$$

لدينا :

$$= \frac{3a^2}{2a\sqrt{a} \times 2a} = \frac{3\sqrt{a}}{4a}$$

بالتالي الدالة  $f$  تمديدا بالاتصال في  $a$

**تمرين 4 :**

لدينا  $\forall x > 0 \quad x - 1 < E(x) \leq x$  منه :  $\forall x > 0 \quad 1 - \frac{1}{x} < E(x) \leq 1$

بما أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$  فإن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{x} = 1$

لدينا  $\forall x \in [0; 1[ \quad E(x) = 0$  منه :  $\forall x \in ]0; 1[ \quad \frac{E(x)}{x} = 0$  منه :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{E(x)}{x} = 0$

وبما أن :  $\forall x \in [-1; 0[ \quad E(x) = -1$  منه :  $\forall x \in [-1; 0[ \quad \frac{E(x)}{x} = \frac{-1}{x}$  منه :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{E(x)}{x} = +\infty$

لدينا  $\forall x > 0 \quad 2x - 1 + 3x - 1 < E(2x) + E(3x) \leq 2x + 3x$  منه :  $\forall x > 0 \quad E(2x) + E(3x) > 5x - 2$

وبما أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x - 2 = +\infty$  فإن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} E(2x) + E(3x) = +\infty$

لدينا  $\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq 3x < 1 \\ 0 \leq 2x < \frac{2}{3} < 1 \end{cases} \Rightarrow x \in \left[0; \frac{1}{3}\right[$  إذن :  $E(2x) + E(3x) = 0$

منه :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} E(2x) + E(3x) = 0$

و  $\Rightarrow \begin{cases} -1 \leq 3x < 0 \\ -1 < \frac{-2}{3} \leq 2x < 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{3}; 0\right[$  إذن :  $E(2x) + E(3x) = -2$

منه :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} E(2x) + E(3x) = -2$

لدينا  $\forall x > 0 \quad \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} < E(\sqrt{x}) \leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

وبما أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$  فإن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(\sqrt{x})}{\sqrt{x}+1} = 1$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow 2} E(3x) = 6$  : منه  $\forall x \in \left[2; \frac{7}{3}\right[ \quad E(3x) = 6$  إذن :  $x \in \left[2; 2 + \frac{1}{3}\right[ \Rightarrow 6 \leq 3x < 7$

و  $\lim_{x \rightarrow 2} E(3x) = 5$  : منه  $\forall x \in \left[\frac{5}{3}; 2\right[ \quad E(3x) = 5$  إذن :  $x \in \left[2 - \frac{1}{3}; 2\right[ \Rightarrow 5 \leq 3x < 6$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{E(2x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x-1} = +\infty$  إذن :  $x \in \left[1; \frac{3}{2}\right[ \Rightarrow 2 \leq 2x < 3$

و  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{E(2x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = -\infty$  إذن :  $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right[ \Rightarrow 1 \leq 2x < 2$

نضع :  $t = \frac{1}{x}$  منه :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+3) E\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} \left(\frac{1}{t} + 3\right) E(t)$

لدينا :  $\forall t \in [0; 1[ \quad \left(\frac{1}{t} + 3\right) E(t) = -\left(\frac{1}{t} + 3\right)$  : منه  $t \in [-1; 0[ \quad E(t) = -1$

منه  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+3) E\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} -\left(\frac{1}{t} + 3\right) = +\infty$

لاحظ الفرق الكبير بين الطريقتين في  $+\infty$  و في الصفر عندما يتعلق الأمر بدالة الجزء الصحيح

كما يجب أن تعلم أنه لا يمكننا التعويض ببساطة عندما يتعلق الأمر بنهاية لدالة الجزء الصحيح في عدد صحيح والسبب أن هذه الأخيرة غير متصلة في أي عدد صحيح، لذلك نلجأ إلى تديد قصورها في مجال مفتوح يتضمن العدد المراد حساب النهاية فيه أو يكون أحد طرفي المجال.

دالة الجزء الصحيح من الدوال التي يصعب التعامل مع خواصها كان هذا التمرين محاولة لتوضيع بعض الطرق المستعملة لحساب نهايات تتضمن هذه الدالة.

**تمرين 5 :**  $f(x) = \frac{|x^2 - 2x| - 8}{x^2 - 5x + 4}$

1) بعد حساب المحددة نجد :  $Df = ]-\infty; 1[ \cup ]1; 4[ \cup ]4; +\infty[$

2) لدينا :  $\forall x > 2 \quad x^2 - 2x = x(x-2) > 0$

منه :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 5x + 4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

و  $\forall x < 0 \quad x^2 - 2x = x(x-2) > 0$  : منه  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

وبما أن :  $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 5x + 4 = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow 1} |x^2 - 2x| - 8 = -7$  و  $x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$

منه :  $1 < x < 4 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 < 0$  و  $x < 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 > 0$

فإن :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$

3 لدينا :  $\forall x \in [3;5] \quad x^2 - 2x = x(x-2) > 0$  إذن :  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)(x-4)} = \frac{6}{3} = 2$

إذن الدالة  $f$  تمديدا بالاتصال في 4

🌟 لاحظ أن دالة القيمة المطلقة أيضا يجب التعامل معها في أغلب الحالات في مجالات، لكنها عكس دال الجزء الصحيح متصلة على  $IR$  لذلك يمكن التعويض فيها دائما.

**تمرين 6 :**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 + \dots + x^n - n}{(2-x)^n - 1}$

الطريقة 1:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 + \dots + x^n - n}{(2-x)^n - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) + (x^2-1) + (x^3-1) + \dots + (x^n-1)}{(2-x-1)[(2-x)^{n-1} + (2-x)^{n-2} + \dots + 1]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)[1 + (x+1) + (x^2+x+1) + (x^3+x^2+x+1) + \dots + (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)]}{(1-x)[(2-x)^{n-1} + (2-x)^{n-2} + \dots + 1]} \\ &= \frac{1+2+3+\dots+n}{-n} = \frac{-\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{-(n+1)}{2} \end{aligned}$$

الطريقة 2:

نضع :  $f(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$  و  $g(x) = (2-x)^n$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 + \dots + x^n - n}{(2-x)^n - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{g(x) - g(1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x) - f(1)}{x-1}}{\frac{g(x) - g(1)}{x-1}} \quad \text{إذن :}$$

بما أن  $f$  قابل للاشتقاق على  $IR$  حيث :  $\forall x \in IR \quad f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$

و  $g$  قابل للاشتقاق على  $IR$  حيث :  $\forall x \in IR \quad g'(x) = -n(2-x)^{n-1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 + \dots + x^n - n}{(2-x)^n - 1} = \frac{-(n+1)}{2} \quad \text{بالتالي :} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = g'(1) = -n$$

🌟 الاشتقاق يكون مفيدا في تحديد نهايات كثيرة دون الحاج للتعميل أو استعمال طرق معقد أو طويلة.