

التمرين الأول

أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{\sin x - \tan^2 x}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(\sqrt{x})}{x+1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^3} - 1 - \frac{1}{3}x}{x^2}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} E\left(\frac{3}{x}\right), \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{\sqrt{a^2 - x^2} + a - x}{\sqrt{a-x} + \sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{nx^{n+1} - (n+1)x + 1}{x^{p+1} - x^p + x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2 + \sqrt{x})\sqrt{2-x} - 3}{x^2 - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} + \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\sin(\cos x)}$$

التمرين الثاني

نضع $f(x) = x^2 \left(E\left(\frac{1}{x}\right) + E\left(\frac{2}{x}\right) \right)$

(1) بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad 3x - 2x^2 < f(x) \leq x^2$

(2) استنتج $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

التمرين الثالث

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{x - E(x)}{x + E(x)}$

(1) حدد مجموعة تعريف الدالة f

(2) أ. بين أن $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$

ب. هل الدالة f تقبل تمديدا بالاتصال في النقطة 0

(3) بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ وحدد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

التمرين الرابع

نضع $f(x) = xE\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ وليكن k من $\mathbb{N}^* - \{1\}$

(1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) أ. بين أن $f(x) = x$ $\left(\forall x \in \left] \frac{1}{4}, 1 \right[\right)$ وحدد $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$

ب. أحسب النهاية $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$

(3) بين أن $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$

(4) أ. بين أن $f(x) = (k-1)x$ $\left(\forall x \in \left] \frac{1}{k^2}, \frac{1}{(k-1)^2} \right[\right)$

ب. أدرس نهاية الدالة f عند النقطة k

التمرين الأول

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = 1 + \sin x - x$

$$(1) \text{ يبيء أو } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ و أحسب } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

(2) أدرسه تغيرات الدالة f

$$(3) \text{ يبيء أه المعادلة } x - \sin x = 1 \text{ قبل حلا وحيدا } \alpha \text{ ثم فاه } \alpha \text{ و العدد } \frac{\pi}{2}$$

التمرين الثاني

(1) لتلك f دالة متصلة على المجال $[a, b]$ يبيء أه : $f(\beta) = kf(a) + (1-k)f(b)$ $(\forall k \in]0, 1[)$ $(\exists \beta \in [a, b])$

(2) لتلك g دالة متصلة على المجال $[a, b]$ و بحيث $g(a) = g(b)$ يبيء أه $g(\alpha) = g\left(\alpha + \frac{b-a}{2}\right)$ $(\exists \alpha \in [a, b])$

(3) لتلك f دالة متصلة على المجال $[0, 1]$ و بحيث $f([0, 1]) \subseteq [1, 2]$ يبيء أه $f(\beta) = \frac{1}{\beta}$ $(\exists \beta \in]0, 1[)$

(4) لتلك f دالة متصلة على المجال $[1, 2]$ يبيء : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} + \frac{\sin \alpha}{\alpha-2}$ $(\exists \alpha \in]1, 2[)$

التمرين الثالث

ليكن n عددا طبيعيا بحيث $n \geq 2$. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$

(1) أ- أدرسه منحي تغيرات الدالة f

$$\text{ب- استنتج أه } f\left(\frac{2n}{n+1}\right) < 0$$

(2) يبيء أه : $f(\alpha) = 0$ $(\exists \alpha \in \left[\frac{2n}{n+1}, 1\right])$

التمرين الرابع

(1) نعتبر الدالة f المعرفة على $[0, 1]$ بما يلي : $f(x) = 2\sqrt{1-x^2}$. يبيء أه f تقابل مع المجال $[0, 1]$ نحو مجال J يتم تحديده و عرف

دالتها العكسية

$$(2) \text{ نضع } f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

أ- حدد D_f و أحسب نهايات الدالة f عند محداث D_f

ب- أدرسه تغيرات الدالة f ثم ضع جدول تغيراتها

ج- ليكن g قصور الدالة f على المجال $I = [0, 1[$ يبيء أه g تقابل مع المجال I نحو مجال J يتم تحديده و عرف تقابله العكسي

التمرين الأول

بين ما يلي : $4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{120}{119}\right)$ ، $\arctan\frac{3}{2} - \arctan\frac{1}{5} = \frac{\pi}{4}$

$\arctan 2012 - \arctan\frac{2011}{2013} = \frac{\pi}{4}$ ، $4 \arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{70} + \arctan\frac{1}{99} = \frac{\pi}{4}$

التمرين الثاني

أحسب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{\arctan|x| - \frac{\pi}{4}}}{x+1}$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\pi}{4} \right)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^2+4} - 2}{\sqrt{x^2+x+3} - \sqrt{2x+5}}$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}{x}$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2+x+1} - \sqrt{x-1}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt[4]{x^4+1})$ ، $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^3 - \sqrt{x^2+60}}}{\sqrt{x^2 - \sqrt[3]{x^2+60}}}$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt[4]{x^4+1})$

التمرين الثالث

حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$\sqrt[3]{x + \sqrt{x+1}} = \sqrt{x}$ (2) $\arctan x + \arctan x^2 = -\frac{\pi}{4}$ (1)

$\frac{\sqrt{x+3}}{x} + \frac{\sqrt[3]{x+3}}{3} = \frac{\sqrt[3]{x}}{5}$ (4) $\sqrt[3]{(x+1)^2} + 4\sqrt[3]{(x-1)^2} = 4\sqrt[3]{1-x^2}$ (3)

التمرين الرابع

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ بمايلي : $f(x) = \sin x$

(1) بين أن f تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده و لتكن f^{-1} تقابله العكسي

(2) بين أن $(\forall x \in]-1, 1[) \quad f^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

التمرين الخامس

لتكن f دالة معرفة بما يلي : $f(x) = 2 \arctan \frac{2\sqrt{x}}{x+1}$

1- حدد D_f و أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2- أدرس قابلية اشتقاق f على يمين 0

3- أحسب $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f

4- ليكن g قصور الدالة f على المجال $I = [1, +\infty[$

أ- بين أن g تقابل من $[1, +\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده

ب- بين أن $\sqrt{x} = \tan \alpha$ $\left(\exists! \alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \right)$ $(\forall x \in I)$ ثم عرف الدالة العكسية g^{-1}

5- بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1, 2]$

6- أرسم في نفس المعلم المنحني $\Gamma_{g^{-1}}$; C_f