

التمرين الأول

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x+1}-3} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+2}+2x \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x+\sqrt{x^2-x} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-x-6}{x^3+8}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-5}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{4-x}-1} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+\sqrt{x+3}-3}{\sqrt{x}-x} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2-x+2}-x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3} E\left(\frac{2}{x}\right) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x^2-3x+1) \tan(\pi x) \quad , \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{\tan x}-\sqrt{\sin x}}{x^2 \sqrt{x}} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin 3x}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2\sqrt{2-x}-\sqrt{x+3}-3}{\sqrt{1-4x}-\sqrt{x+11}} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2} \quad , \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} E\left(\frac{1}{x}\right)$$

التمرين الثاني

$$\begin{cases} f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; \quad x < 0 \\ f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{\tan x - \sin x}{x^2 \sqrt{x}} & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

(1) بين أن f متصلة على يسار $x_0 = 0$

(2) هل الدالة f متصلة في النقطة $x_0 = 0$ ؟

التمرين الثالث

$$\begin{cases} f(x) = x E\left(\frac{1}{x}\right) & ; \quad x < 0 \\ f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{x - E(x)}{\sqrt{x}} & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

(1) بين أن f متصلة على يمين $x_0 = 0$

(2) هل الدالة f تقبل تمديدا بالاتصال في النقطة $x_0 = 0$ ؟

التمرين الرابع

$$f(0) = 1 \quad \text{و} \quad f(x) = x \sqrt{\left(1 + E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 + 1} \quad ; \quad x \neq 0$$

نعتبر الدالة

(1) بين أن $\sqrt{x^2+1} \leq f(x) \leq \sqrt{2x^2+2x+1}$ ($\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$) ثم استنتج أن f متصلة على يمين $x_0 = 0$

(2) هل الدالة f متصلة في النقطة $x_0 = 0$ ؟

التمرين الخامس

(1) لتكن f دالة متصلة على $[0,1]$ و بحيث $f(1) \geq 0$ بين أن : $1 - c = c^2 f(c) : (\exists c \in]0,1[)$

(2) لتكن f دالة متصلة من $[0,1]$ نحو $[0,1]$ بين أن : $f(\beta) + f(1 - \beta) = 2\beta : (\exists \beta \in [0,1])$

(3) لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$ و لتكن $x_n \dots x_2, x_1$ n عنصر من المجال $[a,b]$

بين أن : $(\exists \alpha \in [a,b]) : f(\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f(x_k)$

(4) لتكن f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ وبحيث : $(\exists a \in \mathbb{R}) : (f \circ f)(a) = a$ بين أن f تقبل على الأقل نقطة صامدة

التمرين السادس

(1) أحسب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \arctan \frac{1}{x-2}$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan \sqrt{x^2 + x}}{x}$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \arctan x - \frac{\pi}{4}}{x-1}$ و استنتج $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{4}}{x-1}$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\arctan x - \frac{\pi}{2} \right)$

(2) أ- بين أن : $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$ و أحسب $b = \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{2}{3}$

ب- بين أن $\arctan \frac{1}{7} + 2 \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$ و $\arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

(3) أ- بين أن : $2 \arctan(\sqrt{x^2 + 1} - x) + \arctan x = \frac{\pi}{2}$

ب- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $\arctan x + \arctan 2x = \frac{\pi}{4}$

ج- بين أن : $\sum_{k=1}^{k=n} \arctan \frac{1}{k^2 + k + 1} = \arctan(x+1) - \arctan x = \arctan \frac{1}{x^2 + x + 1} (\forall x \in \mathbb{R}^+)$ ثم بسط التعبير

التمرين السابع

أحسب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x+1} + 2}{\sqrt[4]{x+3} \sqrt{x}}$ ، $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{3x+4} - \sqrt{2+x}}{x+1}$ ، $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 1}{\sqrt{x-1} - 1}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 + 1} \right)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^2 + 1} + 3x$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt[3]{x^3 + 1}$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x-1}$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}} \sqrt[12]{x}$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2 - 1}}{\sqrt[6]{x} - \sqrt{x-1}}$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - 1}$